ŠESTNÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*

Zpráva o řešení úloh ze soutěže, konané ve školním roce 1966—1967

*

DEVÁTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

PRAHA 1968

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

3. Vypočítajte súčet

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \,.\, \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \,.\, \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \,.\, \cos 3} + \dots +$$
$$+ \frac{\sin 1}{\cos (n - 1) \cos n},$$

kde n je dané prirodzené číslo.

Riešenie. Upravíme člen súčtu

$$\frac{\sin 1}{\cos (k - 1) \,.\, \cos k} \tag{1}$$

pomocou rovnosti

$$\sin 1 = \sin [k - (k - 1)] = \sin k \,.\, \cos (k - 1) -$$
$$- \cos k \,.\, \sin (k - 1) \,. \tag{2}$$

Ak dosadíme z (2) do (1), dostaneme

$$\frac{\sin 1}{\cos (k - 1) \cos k} = \operatorname{tg} k - \operatorname{tg} (k - 1) \,. \tag{3}$$

Členy (3) máme sčítať pre $k = 1, 2, \dots, n$. Hľadaný súčet

je teda $s = (\text{tg}\,1 - \text{tg}\,0) + (\text{tg}\,2 - \text{tg}\,1) + (\text{tg}\,3 - \text{tg}\,2) +$
$+ \ldots + (\text{tg}\,n - \text{tg}\,(n-1))$,
t. j.

$$s = \text{tg}\,n - \text{tg}\,0 = \text{tg}\,n\,.$$

Poznámka. Dá sa dokázať, že $\cos k \neq 0$ pre každé prirodzené číslo k. Ak by totiž pre niektoré prirodzené číslo k platilo $\cos k = 0$, bolo by

$$k = \frac{\pi}{2} + \lambda\pi \quad (\lambda \text{ celé}).$$

Stade by sme dostali $\pi = \dfrac{2k}{1 + 2\lambda}$, čo však nie je možné, pretože π je číslo iracionálne.