ŠESTNÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*

Zpráva o řešení úloh ze soutěže, konané ve školním roce 1966—1967

*

DEVÁTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

PRAHA 1968

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

2. Je daná funkcia

$$y = \sqrt{x \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1} - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1} + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}}\,.$$

Zistite jej obor definície a zostrojte jej graf.

Riešenie. Najprv zistíme obor definície danej funkcie. Z definície druhej odmocniny vyplýva nutnosť splnenia vzťahov

$$\frac{1+x^2}{2x} \pm 1 \geqq 0\,,$$

ktoré sú splnené len pre $x > 0$. Keďže pre kladné x je nezáporným číslom aj výraz pod „veľkou odmocninou“, pričom menovateľ je rôzny od nuly, je daná funkcia definovaná pre

$$x > 0\,. \tag{1}$$

Upravme teraz zlomok

$$\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}-\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}+\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{(1+x)^2}{2x}}-\sqrt{\frac{(1-x)^2}{2x}}}{\sqrt{\frac{(1+x)^2}{2x}}+\sqrt{\frac{(1-x)^2}{2x}}}\,.$$

Použitím známej vety, že $\sqrt{x^2}=|x|$, dostaneme z daného zlomku tvar

$$\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}\,.$$

Z definície absolútnej hodnoty vyplýva pre $x \geqq 1$:

$|1+x| = 1+x$, $|1-x| = x-1$, teda

$$\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}=\frac{1+x+1-x}{1+x-1+x}=\frac{1}{x}; \tag{2a}$$

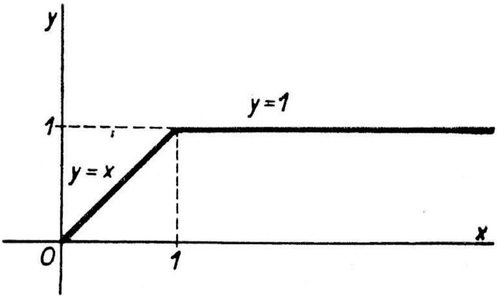
pre $0 < x < 1$ je $|1+x| = 1+x$, $|1-x| = 1-x$ a teda

$$\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}=\frac{1+x-1+x}{1+x+1-x}=x\,. \tag{2b}$$

Ak použijeme vzťahy (1) a (2), dostaneme:

pre $x \geqq 1$ je $y = \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$, pre $0 < x < 1$ je $y = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Grafom danej funkcie je teda lomená čiara znázornená na obr. 23.



Obr. 23.