29. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE

HISTORIE MATEMATIKY

Velké Meziříčí, 22. 8. – 26. 8. 2008

Praha 2008

ISBN 978-80-7378-048-7

DOKONALÉ ČÍSLA

NAJSTARŠÍ OTVORENÝ PROBLÉM MATEMATIKY

ŠTEFAN PORUBSKÝ[1]

O prvočíslach a dokonalých číslach môžu deti klásť otázky, na ktoré dospelí len ťažko odpovedia. (P. Erdős)

Ako úvod do štúdia matematiky je elementárna teória čísiel jedna z najvhodnejších oblastí matematiky. Vyžaduje minimálne predbežné znalosti, jej problematika je príťažlivá a ľahko pochopiteľná, využíva niekoľko jednoduchých, ale všeobecných metód uvažovania, a je jedinečná medzi matematickými disciplínami, čo sa týka vyburcovania prirodzenej ľudskej zvedavosti. (G. H. Hardy)

1 Z histórie prirodzených čísiel

1.1 Dvojaká tvár prirodzených čísiel

Z historického pohľadu, čísla predstavujú pomerne vysoký stupeň abstrakcie ľudského myslenia, a stupeň abstrakcie v ich používaní je často ukazovateľom stupňa intelektuálneho rozvoja danej spoločnosti. Čísla sú výsledkom abstrakcie v procese počítania a merania, a podľa rôznych teórií začali ľudia používať čísla v primitívnej písomnej forme asi pred 30 000 rokmi. Prvou formou zápisu bol zápis pomocou tzv. *unárneho systému*, v ktorom je každé číslo reprezentované odpovedajúcim počtom zvolených symbolov, napr. vrubov na vrubovkách (rovášoch). Jeho podkladom je poznatok, že číslo nie je nič iného než súhrn jednotiek a jeho typickým prejavom sú primitívne formy zápisu čísiel, ako egyptské, rímske, alebo čínske číslice, kipy Inkov, atď., alebo počítanie na prstoch, ku ktorému sa ešte krátko vrátime,

Číslovku už ako slovný druh tvoria samostatný a svojský druh, a ako také majú ďalšie zvláštne postavenie. Sú jediným slovným druhom, pre ktoré môžeme v písanom texte použiť aj špeciálne grafické znaky – číslice. To všetko je výsledkom istej abstrakcie *an sich*, keď 5 znamená *päť prstov bez prstov*. A. N. Whitehead poznamenal: *Prvý človek, ktorý si uvedomil analógiu medzi skupinou siedmich rýb a skupinou siedmich dní, urobil pozoruhodný krok v dejinách myslenia (Bol to prvý človek, ktorý si uvedomil pojem z čistej matematiky.)*

To, že existujú štyri základné operácie s číslami, pozná (snáď) každý školák. Málokto ale vie, že v minulosti[2], sa v učebniciach uvádzalo 6 základných operácií (naviac bolo tzv. pólenie a zdvojovanie (duplicírka), t.j. delenie a násobenie dvomi). A len matematik vie, že v podstate máme len dve operácie, sčítanie a násobenie, pričom násobenie je len skrátená forma sčítania. Napríklad egyptská matematika bola „aditívna“. Násobenie bolo u nich redukované na súčet postupných zdvojení, pričom zdvojenie je vlastne sčítanie čísla so sebou samým. Prví, kto si uvedomili, že sčítanie rovnakých čísiel sa dá vyjadriť

---

[1] Práca bola napísaná s podporou projektu 1ET200300529 programu Informační společnost a výzkumného záměru AV0Z10300504.

[2] Viď, napr. *Algorismus prosaycus* od Křišťana z Prachatic asi z r. 1400.

ako násobenie, boli asi Sumeri, ktorí asi začiatkom 3. tisícročia doplnili zoznam operácií „objavom“ delenia.

Sčítanie a násobenie čísiel (a aritmetické operácie vôbec) predstavujú akýsi janusovský[3] charakter aritmetickej štruktúry prirodzených čísiel. Unárny zápis reflektuje „priehľadnú“ aditívnu štruktúru množiny prirodzených čísiel, keď všetky prirodzené čísla môžeme vygenerovať púhym pripočítavaním jednotky. Euklid vo svojich Základoch v Knihe VII časti Výmery (definície) podľa Servítovho prekladu píše:

1. Jednotka jest, dle níž každé věci se říká jedna.
2. Číslo, pak je množství složené z jednotek.

Táto jednoduchá aditívna štruktúra množiny prirodzených čísiel kontrastuje s ich podstatne komplikovanejšou multiplikatívnou štruktúrou. Letmý pohľad na zoznam tzv. šťastných a nešťastných čísiel, ktoré sa do našej kultúry dostali cez veľmi poverčivých Sumerov a Rimanov, naznačuje, že ľudia si pomerne dávno uvedomili, že z multiplika-tívneho hľadiska majú prirodzené čísla omnoho zaujímavejšiu štruktúru. Šťastné alebo nešťastné čísla sú obyčajne prvočísla.

1.2 Prvočísla, zložené čísla a problematika deliteľov

Na počiatku diferenciácie medzi prvočíslami a zloženými číslami bolo pravdepodobne pozorovanie, že nie každé číslo sa dá napísať ako súčin dvoch čísiel väčších než 1.

Prvé náznaky potreby „vedecky“ diferencovať medzi prvočíslami a zloženými číslami sa objavujú u starých Egypťanov v ich formulách pre rozklad zlomkov tvaru $2/n$ do kmeňových zlomkov. Pre malé nepárne menovatele n používali formulu $\frac{2}{n}=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}$, pre nepárne zložené menovatele typu nm používali viaceré vzťahy, napr. $\frac{2}{nm}=\frac{2}{\frac{n+1}{2}m}+\frac{2}{\frac{n+1}{2}nm}$. Pre väčšie prvočísla používali rozklad typu $\frac{2}{p}=\frac{1}{a}+\frac{2a-p}{an}$, kde a je číslo z intervalu $p/2<a<p$ s vlastnosťou, že má veľký počet deliteľov. Z tejto bohatej množiny deliteľov potom brali čitateľov pre ďalší rozklad druhého sčítanca v poslednom rozklade.[4]

Ako naznačujú predchádzajúce riadky, naši predkovia si začali dobre uvedomovať, že až vo vzájomnej interakcii oboch štruktúr – aditívnej a multiplikatívnej, väzí ťažisko riešenia mnohých praktických problémov. Z dnešného pohľadu bolo a v predchádza-júcom rozklade niečo ako tzv. *praktické číslo*, t.j. prirodzené číslo s vlastnosťou, že každé menšie prirodzené číslo sa dá napísať ako súčet jeho deliteľov.[5] Aj keď tento pojem bol

[3] Aj keď bol boh Janus obvykle zobrazovaný s dvomi opačnými tvárami (Janus Geminus nebo Dvojtvárny (Bifrons)) bol Janus v skutočnosti Quadrifrons – boh štyroch tvárí.

[4] V Rhindovom papyre sa uvádza päť metód na rozklad zlomkov $2/n$, dve metódy pre prípad, keď menovateľ je prvočíslo a tri, keď je zložené číslo.

[5] Aj keď praktické číslo, je z hľadiska počtu deliteľov akýmsi protipólom pojmu prvočísla, majú praktické čísla mnoho spoločných vlastností s prvočíslami: odhad ich počtu podobný Čebyševovmu odhadu prvočíselnej funkcie [28], analóg Goldbachovej hypotézy, analóg hypotézy o prvočíselných dvojčatách [17] a pod.

formálne po prvýkrát definovaný [30] v r. 1948, implicitne ho nájdeme už aj vo Fibonacciho *Liber Abbaci* (1202) pri jednej z uvedených metód rozkladu zlomkov na kmeňové zlomky. Ak a je praktické číslo, tak každé racionálne číslo $\frac{b}{a}$ môžeme vyjadriť v tvare $\sum \frac{d_i}{a}$, kde $d_i \mid a$, vďaka čomu sa celý súčet redukuje na súčet kmeňových zlomkov. Počiatočný úsek postupnosti praktických čísiel tvoria čísla $1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, \dots$. Pre zaujímavosť v súvislosti s ďalším textom poznamenajme, že všetky čísla tvaru $2^{n-1}(2^n - 1)$, pre $n = 2, 3, \dots$, sú praktické.[6]

Keď sa pozrieme na definíciu deliteľa u Euklida, tak v Knihe VII v časti Výměry nájdeme tieto definície spojené s týmto pojmom (preklad podľa Servíta):

3. Díl čísla většího jest číslo menší, když se jím větší doměřuje.
5. Násobek čísla menšího je číslo větší, když se menším doměřuje.
11. Kmenné jest číslo, které měří jednotka jediná.
13. Složené jest číslo, které se nějakým číslem doměřuje.[7]

Definícia 11 je známa Euklidova definícia prvočísla. Pojem prvočísla sa údajne po prvýkrát objavuje v práci Speussipusa z Atén[8] [ktorý vychádza z diela pytagorejca Philolaa (asi 480 pr.n.l. – 385 pr.n.l.), z ktorého diela sa učil pytagorejskú filozofiu i sám Platón], kde sa čísla delia na prvočísla (nerozložiteľné) a druhotné (rozložiteľné). Je zaujímavé konštatovať, že tradičná čínska matematika nepoznala pojem prvočísla až do doby jej prvého kontaktu s európskou matematikou okolo roku 1600.

1.3 Číslo 1 a alikvótne časti

Servít pri uvedenej definícii 2 pojmu čísla poznamenal: „Dle toho jednotka není číslo“. Číslo 1 malo historicky výsadné postavenie, čo sa odráža aj v jeho jazykovej forme. 1 sa v mnohých jazykoch správa ako prídavné meno, preberá rod a číslo, napríklad „jeden muž“, „jedna žena“, „jedno okno“, „jedni muži“ ale „jedny ženy“ a pod. Podobne je to aj mnohých iných jazykoch, v Hebrejčine máme tiež **אחד איש** (jeden muž) a **אחת השא** (jedna žena) alebo množné číslo **אחדים**. V Gréčtine podobne máme *ενα* (m: *ενας*, f: *μια*, n: *ενα*). Výsadné historické postavenie jednotky asi malo jeden zaujímavý dopad v definícii toho, čo je to deliteľ.

To, že 1 nie je číslo, prebral Euklid od svojich predchodcov. Aristoteles vo svojej *Metafyzike*, pravdepodobne preberajúc pytagorejskú doktrínu, konštatuje, že jednotka nie

[6] Stewart [31] dokázal, že prirodzené číslo n s kanonickým rozkladom $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_k$, je praktické práve vtedy, keď $p_i \le 1 + \sigma(p_1^{\alpha_1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}) = 1 + \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_j^{\alpha_j + 1} - 1}{p_j - 1}$ pre $i = 2, \dots, k$, kde $\sigma(m) = \sum_{d \mid m} d$ je funkcia súčet deliteľov.

[7] Servít pod čiarou poznamenáva, že „Měří, doměřuje, jest něčemu měrou – jsou výrazy souznačné.“

[8] Speussipus (410? pr. n. l. – 339 pr. n. l.) bol synom Platónovej sestry Potone a stál v čele Platónovej akadémie po Platónovej smrti osem rokov, asi až do svojej smrti. Z jeho diela sa zachoval fragment *O pytagorejských číslach* a fragment nájdený v r. 1953 Raymondom Klibanskym.

je číslo, lebo miera nemôže byť meraným objektom. Prvá definícia čísla[9] sa pripisuje Tálesovi, ktorý definoval číslo ako súhrn jednotiek podľa egyptského vzoru [13], str. 69.

To, že problematika deliteľov mala v antike hlbšie a prekvapujúco iné postavenie, než z dnešného pohľadu očakávame, môžeme dokumentovať piatou knihou Platónových *Zákonov*. Je to jeho posledné a nedokončené dielo, ktoré vydal jeden z jeho žiakov po jeho smrti r. 348 pr.n.l. Tu Platón doporučuje voliť počty bezzemkov a majiteľov pôdy v novo zakladanom štáte tak, aby čísla udávajíce ich počty mali *dostatočne mnoho deliteľov*. Napr. rovné číslu 5040, ktoré má, ako uvádza, 59 deliteľov. Zákonodárci musia naviac natoľko ovládať aritmetiku, aby podľa veľkosti mesta to boli schopní primerane zariadiť. Poznamenajme, že grécki matematici robili rozdiel medzi *aritmetikou* ako vedou o číslach a *logistikou* ako praktickom počítaní.

Pozorný čitateľ si iste všimol, že uvedený počet deliteľov čísla 5040 nesedí. Platón za deliteľa nepovažoval číslo samotné.[10] Z toho vyvstávajú dve otázky:

1. Čím sa vyznačuje číslo 5040?
2. Prečo Platón vynechal číslo samotné zo zoznamu deliteľov (a trebárs nie 1, akoby sme mohli očakávať podľa prvého odstavca tejto časti)?

Istú cestičku na hľadanie odpovede na prvú otázku naznačuje Platón tým, že hovorí o veľkom počte deliteľov. Matematicky sa dá jednoducho dokázať, že ku každému m existuje najmenšie prirodzené číslo n s m deliteľmi. V minulom storočí vznikla nasledujúca definícia: Číslo n sa nazýva *silne zložené*, ak má väčší počet deliteľov než ľubovoľné od neho menšie číslo. Vieme, že existuje nekonečne veľa silne zložených čísiel [29], str.114. Začiatok postupnosti silne zložených čísiel tvoria čísla 1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040, 7560, ...[11] Naše číslo 5040 je medzi nimi, aj keď Platón túto definíciu asi nepoznal. Platón požaduje od čísla na mieste 5040, čo najdlhšiu, pravidelnú a neprerušenú sériu deliteľov, včítane všetkých čísiel od 1 do 10. Prvé číslo, ktoré spĺňa túto poslednú podmienku v postupnosti silne zložených čísiel je 2520, takže prvú otázku asi nezodpovieme ľahko.

Druhá otázka sa tiež nedá jednoducho zodpovedať. V antike sa za deliteľa považovali len vlastné delitele, ako to už vlastne naznačuje hore uvedená definícia z Euklida. Takéto delitele sa v staroveku nazývali *alikvótne časti*. To, že samotné číslo sa nepovažovalo za deliteľa má s najväčšou pravdepodobnosťou korene práve v egyptskej aritmetike spojenej s rozkladom zlomkov na kmeňové zlomky $\frac{1}{n}$, kde $n > 1$ je prirodzené číslo. V prípade, že d je deliteľ čísla n, tak zlomok $\frac{d}{n}$ sa po vykrátení stane kmeňový, len ak $d < n$, čo vylučuje samotné číslo n z pozície deliteľa. Na druhej strane, ak $d = 1$, tak dostaneme

[9] Len na okraj pripomeňme, že Platón diferencoval medzi pojmom ideálneho čísla a čísla „používaného“ v matematike. Platón nechápal ideálne číslo ako súhrn jednotiek, lebo každé ideálne číslo, ako ideálna dvojka, ideálna trojka, atď., ako ideálne objekty sú samostatnými dokonalými jednotkami, ktoré podobne ako ostatné idey sú nedeliteľné, nemajú časti, a nie sú odvodené zo žiadneho iného princípu.

[10] Číslo 5040 má týchto deliteľov 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 84, 90, 105, 112, 120, 126, 140, 144, 168, 180, 210, 240, 252, 280, 315, 336, 360, 420, 504, 560, 630, 720, 840, 1008, 1260, 1680, 2520, 5040.

[11] Z pohľadu tvrdenia, že čím viac deliteľov má základ pozičnej sústavy, tým menej je nekonečných (periodických) rozvojov racionálnych čísiel, je iste zaujímavé vidieť, že 60 je silne zložené číslo, kým 10 nie je.

priamo kmeňový zlomok, čo je možná príčinou toho, že jeho čitateľ 1 „unikol“ ďalšej logickej analýze a prirodzenou cestou sa zaradil medzi delitele, aj keď 1 mala zvláštne generické postavenie medzi číslami.

S postupne sa meniacim postavením 1 ako čísla, súvisí aj otázka, prečo 1 nie je považovaná za prvočíslo. Či je 1 prvočíslo, alebo nie je, je vecou definície. V modernej literatúre, 1 nie je klasifikovaná ani ako prvočíslo, ani ako číslo zložené. V starších textoch, však bola 1 považovaná za prvočíslo.[12] Francúzsky číselný teoretik V. A. Le Besgue[13] (1791–1875) explicitne uvádza 1 ako prvočíslo vo svojom diele [7] z r. 1859. Niekedy je možné nájsť v literatúre zmienku, že posledný matematik, ktorý zahrnul 1 medzi prvočísla bol H. Lebesgue (1875–1941) v r. 1899. Toto tvrdenie rozhodne nie je pravda, D. N. Lehmer zahrnul 1 do svojho zoznamu prvočísiel ešte v r. 1914 (aj keď možno len z historických dôvodov). Známy propagátor vedy a astronóm C. Sagan zahrnul 1 medzi prvočísla ešte v r. 1985 vo svojom slávnom románe *Kontakt*. Dôvod, prečo 1 dnes nie je považovaná za prvočíslo je veta o jednoznačnom rozklade na prvočísla. Táto mimoriadne dôležitá veta bola po prvýkrát sformulovaná a dokázaná až v C. F. Gaußom v jeho *Aritmetických rozpravách*. Je istou iróniou osudu, že priamy nasledovník Gaußa na mieste profesora na univerzite v Göttingen, M. A. Stern (1807–1894) aj naďalej zaraďoval 1 medzi prvočísla.

2 Počítanie na prstoch

Počítanie na prstoch bolo istotne bežné už veľmi dávno. Ako počítacie pomôcky boli prsty vždy „po ruke“ a používali sa pri rôznych situáciách (napr. pri tajnom uzatváraní obchodov v prítomnosti cudzích ľudí, pri takomto dorozumievaní dokonca ešte aj v nedávnej dobe medzi maklérmi na burze, atď.). Naviac ako prostriedok počítania bol použiteľný medzi negramotnými ľuďmi. Pomocou prstov síce môžeme číslo vyjadriť, ale nemôžeme ho trvale zaznamenať, ako pomocou vrubov. V počítaní na prstoch má svoj pôvod aj delenie čísiel na *digiti* (jednotky), *articuli* (t.j. články pre desiatky) a *numeri compositi* (zložené čísla). Ďalšie náznaky o tom, že počítanie na prstoch kedysi hralo dôležitú úlohu, zachováva reč i v rôznych zvratoch, napr. „spočítať (si) na prstoch“.

Hoci vieme, ako sa vo všeobecnosti počítanie na prstoch zdokonaľovalo, nemôžeme presne sledovať proces jeho vzniku, lebo písomné záznamy z prvých období neexistujú. Používané praktiky (často s lokálnymi odchýlkami a zvláštnosťami) sa dedili prostredníctvom používania z jednej generácie na druhú.

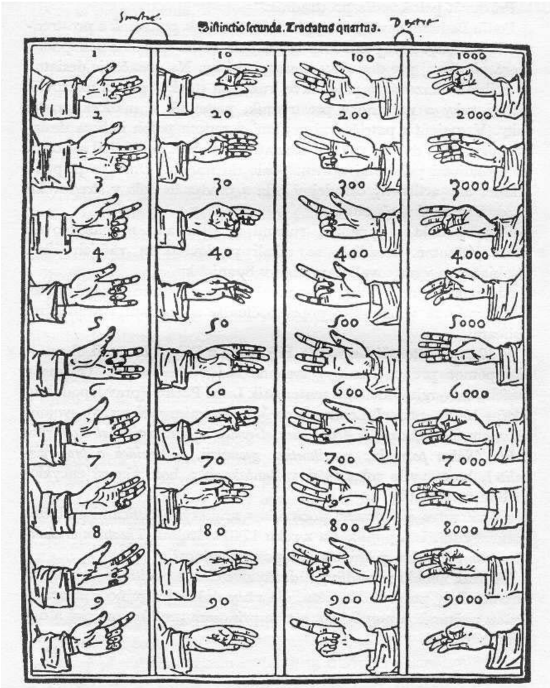
Isté je, že počítanie na prstoch dosiahlo v antickom Ríme svoj najvyšší stupeň, tešilo sa veľkej obľube a odtiaľto prenikalo aj do ďalších krajín. Napr. v diele rímskeho básnika Decima Junia Juvenalia (asi 60–140) je scéna, v ktorej sa hovorí o šťastlivcovi, ktorý na zrátanie svojich rokov potrebuje pravú ruku [18]:

Felix nimirum qui per tot saecula mortem
distulit, atque suos jam dextra computat annos[14].

[12] Len ako zaujímavosť pripomeňme, že (okrem iných aj) novopytagorejci (Leon zo Smyrny, Nikomach atď.) nepovažovali číslo 2 za prvočíslo.
[13] V. A. Le Besgue je niekedy citovaný aj ako Lebesgue, a preto je často zamieňaný so svojím slávnejším menovcom H. Lebesgue-om.
[14] Šťastný je ten, kto tak dlho smrti vzdoroval, a na pravej ruke si mohol spočítať svoj vek.

Nie je to myslené ironicky. Muž je vyše storočný, lebo Rimania znázorňovali čísla od 1 do 99 ľavou rukou a čísla od 100 do 1000 pravou rukou.

Tento zvyk bol taký rozšírený, že sa dostal nielen do literárneho diela Juvenalia, ale aj do diel iných gréckych a rímskych autorov, ako bol Herodotos (asi 484–425 pr. n. l.), Ovídius (43 pr. n. l. – 17 n. l.) a Plínius (23–79). Plínius st. sa vo svojej encyklopédii *Naturalis historia* (Prírodopis) o 37 knihách v knihe 34, 7, 33 zmieňuje o tom, že „kráľ Numa venoval sochu boha Janusa s dvomi tvárami ... prsty v polohe znázorňujúcej číslo 365 ...“ – počet dní v roku; 300 na pravej 65 na ľavej ruke [27], [35].



Prstové číslice podľa Lucu Pacioliho

Najznámejší[15] učenec, ktorý sa počítanie na prstoch pokúsil zaznamenať v písomnej forme bol anglický benediktínsky mních Beda Venerabilis (673?–735). Beda bol predovšetkým cirkevný učiteľ a historik a do dejepisu zaviedol pri označovaní letopočtu pojem „pred narodením Krista“, matematikou sa zaoberal predovšetkým z historického záujmu. Cirkev bola v jeho dobe rozpoltená spôsobom počítania Veľkej noci (tzv. compus paschalis). Tejto problematike venoval svoje dielo *De Temporum Ratione* (O počítaní času). Z nášho pohľadu je toto dielo zaujímavé tým, že Beda tu uvádza úplnú sústavu počítania na prstoch. Ukazuje ako rôzne kombinácie ohnutých a natiahnutých prstov vyjadrujú jednotky, desiatky, stovky a tisíce. Naviac spolu s kombináciami polôh rúk sa rozsah vyjadriteľných čísel rozširuje až do miliónu. Bez Bedu by bolo počítanie na

[15] Existuje skorší ale menej známy text *Romana computatio* z roku 688.

prstoch ako matematická a tým aj kultúrno – historická kategória dnes už asi zabudnuté, lebo všetky neskoršie publikácie sa vracajú k jeho výkladu.[16]

Z diel uvádzajúcich počítanie na prstoch uveďme Fibonacciho *Liber Abbaci*, ktorá končí prvú kapitole v *Liber Abbaci* detailným popisom počítania na prstoch. Taliansky mních, univerzitný učiteľ a matematik Luca Pacioli (1445?–1514), priateľ Leonarda da Vinciho, sa mu venoval vo svojom hlavnom encyklopedickom diele[17] *Summa de Arithmetica, Geometrica, Propotioni et Proporcionalita* (Súhrn poznatkov o aritmetike, geometrii, proporciách a proporcionalite), ktoré vyšlo roku 1494 v Benátkách. Až víťazstvo písomného počítania s arabskými číslicami zatlačilo prstové počítanie.

3 Dokonalé čísla

3.1 Odkedy je dokonalé číslo dokonalé?

V predchádzajúcich častiach sme sa stretli s rôznymi klasifikáciami čísiel. Asi najstaršia všeobecná klasifikácia čísiel sa objavuje u pytagorejcov, u ktorých dôležite bolo, napríklad, delenie čísiel na párne a nepárne (pozostatky tejto klasifikácie nájdeme v *Základoch* IX, 21 – 34).[18] Pytagorejci si však všímali nielen delenia, ktoré sa vzťahujú na všetky čísla, ale aj individuálne vlastnosti čísiel. Pytagorovi je pripisovaný aj objav trojuholníkových čísiel, t.j. čísiel tvaru $n(n-1)/2$, kde $n = 2, 3, \ldots$. Jedno z trojuholníkových čísiel číslo $10 = 1+2+3+4$, zvané τετρακτύς, hralo u pytagorejcov mimoriadnu úlohu,[19] a preto bolo nazývané τέλειος[20] – *dokonalým*.

Iný pojem dokonalého čísla, ale s rovnakým slovným označením, nachádzame u Euklida. Výměra 22 v Knihe VII podľa Servíta znie:

22. Plné (τέλειος) jest číslo, jež se rovná součtu svých dílů.

Inými slovami, číslo je plné, t.j. *dokonalé*, ak je súčtom svojich alikvótnych častí. Príkladmi dokonalého čísla je $6, 28, 496, 8128$:

6 = 1+2+3,
28 =1+2+4+7+14,
496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248,
8128 = 1+2+4+8+16+32+54+127+254+508+1016+2032+4064.

Ale v základnom tvrdení o dokonalých číslach používa Servít iný termín (Základy IX, 36): Když jest dáno po řadě od jednotky několik čísel v poměru jedné ke dvěma, až součet všech stane se číslem kmenným, a když se ten součet znásobí číslem posledním a vznikne jiné, vzniklé bude číslo dokonalé (τέλειος).

[16] Číňania používali úplne iný systém znázorňovania čísiel pomocou prstov [33].
[17] Obrázok je prevzarý z knihy [15], str. 61.
[18] Philolaus napr. nepovažoval 2 za párne číslo, ale ani za prvočíslo.
[19] Napr. Philolaus, ktorému je pripisovaná prvá teória o tom, že naše Zem nie je stredom vesmíru, veril, že existuje akási „proti-Zem“ vyvažujúca našu planétu, len kvôli tomu, aby počet nebeských telies bol 10 (to je údajne Aristetolovo vysvetlenie pre tento počet, ku ktorému neboli iné dôvody). Na desiatich kruhových dráhach okolo centrálneho ohňa sú umiestnené pevné hviezdy (na vonkajšej dráhe ako opora pre ostatné telesá), potom päť planét, Mesiac, Slnko, Zem a proti-Zem.
[20] Toto grécke slovo použil i Aristoteles vo svojej Metafyzike, Kniha A, časť 5, odstavec 1, keď charakterizoval pytagorejské stanovisko.

V súčasnej formulácii: Ak $2^n - 1$ je prvočíslo, tak $2^{n-1}(2^n - 1)$ je dokonalé číslo.

Aj keď v origináli je na obidvoch miestach použité to isté slovo τέλειος, Servít volí dva rôzne preklady. Existujú autori [1], [32], ktorí aj dnes považujú za vhodnejšie používať slovo *complete* namiesto *perfect* (dokonalé). Autorovi týchto riadkov nie je známe, prečo Servít používa dva rôzne preklady pre ten istý pojem. Je možné, že sa mu viac pozdával preklad „plné číslo“, ale vo vety 36 sa prispôsobil používanej terminológii. Pritom v skorších publikáciách o dokonalých číslach [2], [4], [5], najprv ešte poslucháča filozofie Bezdíčka a potom už profesora, alebo v komentári redakcie [3] sa vždy používa slovo dokonalý, napriek tomu, že autor Bezdíček je kritický k niektorým použitým prekladom. V literatúre sa tiež uvádza, že slovo „dokonalý“ údajne po prvýkrát použil Nikomach z Gerasy (okolo r. 100 n.l.) vo svojej *Arithmetike eisagoge* (Úvod do aritmetiky). V skutočnosti ale tiež použil slovo τέλειος, ako pre dokonalé číslo (časť I, 14 a I, 16), tak aj pre tetraktys (II, 22 [19]). Necelé tri storočia neskoršie ale Sv. Augustín z Hipponu (354–430) v časti 30 *De senarii numeri perfectione* (O dokonalosti čísla šesť) Knihy 11 z 22 kníh diela *De Civitate Dei* (O božskej obci) používa slovný základ perfectus:

> Je zaznamenané, že celá božia práca bola dokončená za šesť dní, pretože šesť je dokonalé číslo. ... Pretože to je prvé číslo zložené zo šestiny, tretiny a polovice, lebo jednotka dvojka a trojka dávajú spolu šesť. ...

V angličtine sa údajne termín „perfect number“ objavuje po prvýkrát r. 1570 v anglickom preklade Euklida od sira Henryho Billingleya. V r. 1674 píše Samuel Jeake v diele *Arithmetic* „Perfect Numbers are almost as rare as perfect Men“.

3.2 Kultúrne-historické asociácie

Kedy (a kde) si ľudia uvedomili, že vlastnosť byť súčtom svojich vlastných deliteľov, môže byť zaujímavá, nie je ľahké zodpovedať. Je iste povšimnutiahodné, že v pojme dokonalého čísla došlo k mystickému spojeniu aditívnej vlastnosti „súčet“ s multiplikatívnou „deliteľ“.[21] Ak by sme v súčasnej terminológii a označení vzali, súčin a nie súčet deliteľov, je odpoveď pomerne jednoduchá: Súčin všetkých deliteľov daného čísla $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ sa rovná $\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}$, kde $\tau(n)$ označuje počet deliteľov čísla n. Na druhej strane, pre súčet všetkých deliteľov čísla n máme $\sum_{d|n} d = \prod_{p^\alpha \| n} (p^{\alpha+1} - 1)/(p-1)$. Na prvý pohľad je vidieť „dráždivý“ rozdiel v zložitosti, pričom v minulosti nepoznali našu symboliku, ktorá len zjednodušuje zápis.[22] Na tomto mieste len pripomeňme citát z Eulera

> Zo všetkých problémov vyšetrovaných v matematike neexistujú také, ktoré by sa v súčasnosti považovali viac neplodnými a neužitočnými, než problémy ohľadne podstaty čísiel a ich deliteľov. V tomto smere sa súčasní matematici silne odlišujú od starovekých, ktorí pripisovali bádaniu tohoto druhu omnoho väčší význam …

---

[21] Naviac číslo 6 je súčasne súčinom i súčtom svojich alikvótnych častí $1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3$.

[22] Čísla, ktoré sa rovnajú sučinu svojich vlastných deliteľov sa volajú *dokonalé čísla druhého druhu*. Ich charakterizácia je jednoduchá [29], str. 123: Sú to jedine mocniny prvočísiel a súčiny dvoch rôznych prvočísiel.

Oni nielen považovali hľadanie istoty za chvályhodné samo o sebe a dôstojné ľudského poznania, ale okrem toho sa naprosto správne domnievali, že tým sa pozoruhodným spôsobom rozvíja vynaliezavosť a pred ľudským intelektom sa takto otvárajú nové možnosti riešiť spletité úlohy …

Matematika by pravdepodobne nikdy nedosiahla takýto vysoký stupeň dokonalosti keby v staroveku nevynaložili toľko úsilia na štúdium problémov, ktorými dnes mnohí opovrhujú pre ich zdanlivú márnosť …

Pojem dokonalého číslo v zmysle súčtu svojich alikvótnych častí má svoj pôvod asi v sumersko-babylónkej tradícii. Hexadecimálna babylonská sústava bola veľmi výhodná pre počítanie so zlomkami. Babyloňania mali pre zlomky $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ a $1/6$ samostatné klinové znaky. K tomu pristúpili ešte „astronomické skutočnosti“: Starí Babyloňania poznali 6 planét (Venuša, Merkúr, Zem, Mars, Jupiter a Saturn)[23]. Naviac dĺžka obehu Mesiaca okolo Zeme je 28 dní, čo je druhé dokonalé číslo. Samozrejme najznámejším citátom v tomto smere je Kniha Genezis 1, 31: *Boh videl všetko, čo urobil: a hľa, bolo to veľmi dobré. Bol večer a bolo ráno: šiesty deň.*

Pôvod pojmu dokonalého čísla je často pripisovaný pytagorejcom. Videli sme, že pod rovnakým slovom sa vlastne skrývajú dva rôzne pojmy[24]. Postupom času sa začali obidva pojmy asi prelínať, ako to môžeme vidieť u význačného predstaviteľa helenisticko-židovského filozofického prúdu Filóna Alexandrijského (25 pr. n. l. – 40 n.l.). V časti III diela *O stvorení sveta* hovorí, že svet bol stvorený behom

… šiestich dní. Nie preto, že by k tomu tvorca potreboval nejaký čas – Boh totiž zrejme všetko robí naraz; nielen to, čo prikazuje, ale i to, čo má sám na mysli – ale preto, že vznikajúce veci vyžadovali vhodný poriadok. Poriadku ale prináleží číslo, a z čísiel je podľa zákonov prírody najvhodnejšia šestka. Pretože z čísiel nasledujúcich po jednotke je šestka prvým dokonalým číslom, ktoré sa rovná svojim častiam a je nimi úplne vyplnené, totiž z poloviny trojkou, z tretiny dvojkou a zo šestiny jedničkou.

A pokračuje v pytagorejskom duchu

Šestka má takpovediac zo svojej povahy mužský aj ženský charakter a je spojená silou tejto dvojitosti. Mužské totiž zastupuje vo veciach bytia nepárne, kým párne je ženské. Prvým z nepárnych čísiel je číslo tri, dvojka je zase prvé z párnych. Silu obidvoch v sebe sústreďuje šestka. ...

Zdá sa, že postupom času pytagorejský aspekt pojmu dokonalého čísla vymizol, asi aj vplyvom Nikomachovho *Úvodu do aritmetiky*, ku ktorému sa ešte vrátime. Za zmienku ešte stojí jedna kultúrno-historická poznámka na tému, *prečo nosíme obrúčku na*

---

[23] Babyloňania boli prví, kto pomenoval dni týždňa po Slnku, Mesiaci a planetách tak, ako to dodnes napr. majú v angličtine: nedeľa – Slnko, pondelok – Mesiac, utorok – Mars, streda – Merkúr, štvrtok – Jupiter, piatok – Venuša, sobota – Saturn [34], čím dostávame spojenie s ďalším magickým číslom, číslom 7.

[24] Interesujúcemu sa čitateľovi o stope pytagorejského pojmu dokonalý v gréckej literatúre doporučujeme ako úvodné čítanie prácu [1], najmä jej časť 2.4. Na druhej strane Taisbak [32] vidí vo formulácii Euklidovho tvrdenia IX.36 vplyv a súvislosti s egyptskou formou násobenia, a touto cestou vysvetľuje aj pôvod pojmu dokonalého čísla ako súčtu alikvótnych častí.

prsteníku [25]. Odpoveď na túto otázku je údajne potrebné hľadať v tabuľke obsahujúcej reprezentáciu čísiel pomocou prstov. Číslo 6 je reprezentované ohnutým prsteníkom.[26] Podľa niektorých autorov, keďže 6 je dokonalé číslo, je spojenie s manželstvom jasné.[27] Existujú však aj iné vysvetlenia. Podľa Platóna 6 reprezentuje manželstvo, lebo je súčinom ženskej 2 a mužskej 3 (Aristoteles vo svojich *Fragmentoch* píše, že podľa pytagorejcov manželstvo reprezentovala 5, lebo $5 = 2 + 3$). V piatej knihe diela Republika priraďuje Platón manželstvu pravouhlý trojuholník so stranami 3, 4, 5, lebo jeho obsah je 6.

3.3 Nicomachov *Úvod do aritmetiky*

Nicomachov *Úvod do aritmetiky* je akousi voľnou prózou o aritmetike, v ktorej sa autor snaží argumentovať v prospech dôležitosti postavenia aritmetiky medzi ostatnými matematickými oblasťami. V podstate neobsahuje žiadny nový materiál, chýbajú dôkazy, ale vydobyla si svoje miesto v dejinách vďaka čitateľnému štýlu, vhodnému usporiadaniu materiálu a ako zdroj všeobecných informácií o číslach a ich vlastostiach. Zdôrazňuje pytagorejský prístup. Z nášho hľadiska zohrala kniha dôležitú úlohu, lebo obsahuje súhrn vtedy známych výsledkov o dokonalých číslach. Mnohé tvrdenia podávané ako fakty sú však nepravdivé, ich odhalenie zohralo veľmi významnú úlohu v ďalšom rozvoji teórie čísiel a matematiky vôbec.

Bez zachádzania do väčších detailov[28] Nicomach delí čísla na superabundantné, deficientné[29] a dokonalé (I, 14) podľa toho, aký je súčet ich vlastných deliteľov.[30] Dokonalé čísla, ako čísla rovnajúce sa súčtu alikvótnych častí, tvoria podľa Nikomacha rozmedzie medzi zvyšnými dvomi triedami. Nicomach uvádza (bez dôkazu ako už bolo uvedené) nasledujúce vlastnosti dokonalých čísel:

- n-té dokonalé číslo má n cifier,
- každé dokonalé číslo končí striedavo buď cifrou 6 alebo 8, v dôsledku čoho každé dokonalé číslo je párne,
- hore uvedeným Euklidovým algoritmom je možné vygenerovať všetky dokonalé čísla,
- existuje nekonečne veľa dokonalých čísel.

V Nikomachovej formulácii Euklidova veta má tvar: Začni od jednotky tvoriť párno-párne čísla ako dlho chceš: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 1024, 2048, 4096, ... Potom ich postupne po jednom spočítaj a zisti aký je výsledok. Keď zistíš, že dostaneš prvočíslo, pripočítaj posledného sčítanca, a výsledkom je vždy dokonalé číslo. Nikomach poznal 4 dokonalé čísla: 6, 28, 496 a 8128.

---

[25] Menninger v druhom diele [18] udáva, že v staroveku sa prsteník volal *medicus*.

[26] Napr. fotografiu ruky Afrodity s prsteňom na prsteníku môžeme nájst v knihe [6]. Socha pochádza z Grécka z 2.–3. st. pr. n. l.

[27] Viď tiež krátku poznámku v tomto smere na str. 130 v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky 25 (1896).

[28] Napr. Nikomach nezaraďuje párne čísla medzi zložené (I, 12) a nasledujúce delenie na superabundantné čísla, deficientné a dokonalé sa vzťahuje v časti I, 14 na jednoduché párne čísla (simple even numbers [19]) a v časti I, 16 je nasledujúca definícia dokonalého čísla uvedená bez tohoto odmedzenia.

[29] Napr. číslo je deficienté, ak súčet jeho vlastných deliteľov je menší než číslo samotné. Takým je číslo 8. Podľa Alkuina z Yorku (732?–804) to dokazuje, že tzv. druhé stvorenie, keď Noe zahránil 8 ľudí vo svojej arche, bolo nedokonalé.

[30] Len ako ukážku uveďme, že Nikomach prirovnáva superabundantné čísla k zvieratám, ktoré majú veľa končatín, desať jazykov, tri rady zubov, atď. Podobné prirovnania má pre deficientné čísla.

3.4 Vývoj do Fermata

Trvalo storočia, kým vývoj pokročil ďalej v problematike dokonalých čísiel. Najprv sa ťažisko presunulo do arabského sveta, kde problematika dokonalých a tzv. spriatelených čísiel našla veľkú odozvu. Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani (836–901) vo svojom diele *Pojednanie o spriatelených číslach* vyšetroval otázku, za akých podmienok je číslo tvaru $2^n p$, kde p je prvočíslo, dokonalé. Ďalší arabský matematik Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham (965–1040) bol asi prvý, kto vyslovil domnienku, že Euklidova postačujúca podmienka je aj nutná [23], [24]. Ismail ibn Ibrahim ibn Fallus (1194 – 1239) vo svojom diele, ktoré nadväzuje na Nikomachov *Úvod do aritmetiky* udáva tabuľku, ktorá obsahuje prvých sedem dokonalých čísiel. Ďalšie tri v jeho tabuľke nie sú správne [8], [9]. Tieto príspevky arabských matematikov zostali v Európe neznáme. Aj Fibonacci, o ktorom sa tvrdí, že prevzal mnohé od arabských matematikov, uvádza vo svojej *Liber Abbaci* len prvé štyri dokonalé čísla, ktoré boli známe už Nikomachovi.

Asi prvým v Európe, kto začal pochybovať o platnosti Nikomachových hypotéz bol Pacioli, ktorý zpochybnil platnosť tvrdenia, že Euklidov vzťah dáva dokonalé číslo pre každé n. Zdá sa, že už predtým renesančný duch začal prenikať a oživovať aj európske matematické dianie. V neskoršie nájdenom neznámom rukopise z roku 1461 sa objavuje piate dokonalé číslo. Toto bolo nájdené aj v istom rukopise Johanna Regiomontana – Müllera (1436–1476) z obdobia jeho pobytu vo Viedni asi r. 1458 [21]. Naviac piate a šieste dokonalé číslo bolo dodatočne nájdené aj v rukopise, ktorý vznikol krátko po roku1460. Autor je neznámy a žil vo Florencii.

V r. 1536 vydal Hudalrichus Regius[31] v Strassburgu knihu *Utriusque Arithmetices*, v ktorej uviedol rozklad $2^{11}-1=23.89$, čím našiel prvé prvočíslo p, pre ktoré vzťah $2^{p-1}(2^p-1)$ nevedie na dokonalé číslo. Naviac tu ukázal, že $2^{13}-1=8191$ je prvočíslo, čím našiel piate dokonalé číslo $2^{12}(2^{13}-1)=33550336$. Týmto objavom síce nepoprel Nikomachovu tézu, že dokonalé čísla majú poslednú cifru buď 6 alebo 8, ale pretože toto číslo má 8 cifier poprel Nikomachovo prvé tvrdenie.

V roku 1603 Pietro Antonio Cataldi (1548 – 1626) vo svojej *Trattato de Numeri Perfetti* vydanej v Bologni rozložil na prvočísla všetky čísla po 800 a metódou Eratostenovho sita našiel všetky prvočísla do 750. Pomocou tej tabuľky zistil, že $2^{17}-1=131071$ je prvočíslo.[32] Z toho odviedol šieste dokonalé číslo $2^{16}(2^{17}-1)=8589869056$ čím poprel ďalšiu Nikomachovu hypotézu, že dokonalé čísla striedavo končia cifrou 6 alebo 8.[33] Cataldi našiel aj ďalšie dokonalé číslo $2^{18}(2^{19}-1)=137438691328$, keď dokázal, že $2^{19}-1=524287$ je prvočíslo.

V r. 1977 sa našlo, že už v r. 1555 uviedol J.Scheybl šieste dokonalé číslo v jeho komentároch k prekladu Euklidových *Základov*.

---

[31] V r. 2008 vyšla práca [25], ktorú autor tohto príspevku ešte nemal v ruke.

[32] Pripomeňme elementárne tvrdenie, často pripisované práve Cataldimu a Fermatovi, že ak 2^n-1 je prvočíslo, tak n je prvočíslo.

[33] Platí: Ak $2^{p-1}(2^p-1)$ je dokonalé číslo, tak (a) jeho posledná cifra je číslo 6, ak $p=2$ alebo $p\equiv 1 \pmod 4$, (b) končí na 28, ak $p\equiv 3 \pmod 4$.

Cataldi však popri serióznych výsledkoch prispel aj nesprávnymi hypotézami. Vo svojom diele *Utriusque Arithmetices* uvádza tvrdenie, že pre exponenty p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 vo vzťahu $2^{p-1}(2^p - 1)$ dostaneme dokonalé číslo. Z posledných štyroch možností je to však pravda len pre $p = 31$.

Dalo by sa povedať, že Cataldim sa skončila éra „amatérskeho" prístupu k riešeniu dvoch hlavných problémov v teórii dokonalých čísiel:

1. Existuje nekonečne veľa dokonalých čísiel?
2. Existuje nepárne dokonalé číslo?

Čo sa týka druhého problému o existencii nepárneho dokonalého čísla, zdá sa, že všeobecne panovalo presvedčenie, že všetky dokonalé čísla sú tvaru, ktorý udával Euklidov vzťah. Avšak Descartes v liste Mersennovi z r. 1638 píše, že nevidí dôvod, aby neexistovali nepárne dokonalé čísla. Tvrdil, že vie dokázať, že každé párne dokonalé číslo je Euklidovho tvaru, a že každé nepárne dokonalé číslo musí mať tvar ps^2, kde p je prvočíslo. Napr. píše: *keby* $p = 22021$ *bolo prvočíslo* (čo ale nie je, lebo $p = 61.19^2$), *tak po vynásobení číslom* 9018009, *čo je štvorec súčinu prvočísiel* 3, 7, 11, 13, *dostaneme* 198585576189, *čo by mohlo by dokonalé* (čo opäť nie je, lebo súčet jeho vlastných deliteľov je 227441894589). *Ale keď použijeme akúkoľvek metódu, bude to vyžadovať hodne času nájsť takéto číslo ...*

4 Začiatky modernej teórie čísiel

Dôležitou postavou ďalšej časti príbehu dokonalých čísiel sa stáva už spomínaný francúzsky mních Marin Mersenne (1588–1648), ktorý sa preslávil najmä svojou významnou sprostredkovateľskou rolou pri výmene nových výsledkov medzi európskymi matematikmi v 30. a 40. rokoch 17.storočia. V r. 1644 vydáva v Paríži *Cogitata Physico Mathematica*, kde tvrdí, že $2^p - 1$ je prvočíslom jedine pre tieto hodnoty p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257 spomedzi 44 prvočísiel ≤ 257. Na počesť Mersenna sa prvočísla tvaru $2^p - 1$ nazývajú *Mersennovými*.

Prvú chybu v Mersennovom zozname našiel v r. 1876 E.Lucas. Overenie správnosti tohoto zoznamu trvalo až do roku 1947, a jeho správne zloženie je {2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127}. Napr. v r. 1876 Catalan položil otázku, či ak $m = 2^p - 1$ je prvočíslo, potom aj $2^m - 1$ je prvočíslo. Catalanova postupnosť začína takto: 3, 7, 127, 170141183460469231731687303715884105727, ale jej piaty člen má 10^{37} dekadických cifier, takže jeho overenie je nad naše súčasné možnosti.

Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581–1638) vydáva v r. 1612 svoju slávnu zbierku *Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres,* ktorá veľmi prispela k „popularizácii" matematiky, a ktorej piate vydanie vyšlo ešte aj v r. 1959.

V r. 1621 vydáva svoj slávny preklad Diofantovej Aritmetiky, ktorá ovplyvnila[34] P. Fermata (1601?–1665).

V r. 1636 oznamuje Fermat Robervalovi, že urobil veľký pokrok v riešení problematiky okolo dokonalých čísiel, a že plánuje o tom vydať publikáciu. Táto však nikdy nevyšla, a naopak Fermat dosť tajil metódy a prostriedky, ktoré objavil a používal. Fermat však dokázal v tejto problematike mnoho hodnotných výsledkov, napr. objavil tzv. malú Fermatovu vetu, jedno z kľúčových tvrdení elementárnej teórie čísiel. Bližšie sa čitateľ môže dozvedieť o detailoch celého vývoja v [22].

Definitívnu bodku v prípade párnych dokonalých čísiel urobil v 18. stor. L.Euler, keď v prácach, ktoré boli publikované po jeho smrti dokázal, že všetky párne dokonalé čísla sú Euklidovho typu, čím potvrdil Nikomachovu tézu. Tým definitívne zredukoval otázku párnych dokonalých čísiel na problém o Mersennových prvočíslach. To, či je ich nekonečne veľa nevieme ani dnes.

Euler prispel aj k otázke nepárnych dokonalých čísiel. Dokázal Descartovo tvrdenie a šiel ďalej. Dokázal, že každé nepárne dokonalé číslo má tvar $(4n+1)^{4k+1}b^2$, kde $4n+1$ je prvočíslo. Iný typ výsledku dokázal J. J. Sylvester v r. 1888: Každé nepárne dokonalé číslo má aspoň 4 rôzne prvočíselné delitele. Dnes vieme, že nepárne dokonalé číslo musí mať aspoň 300 cifier, aspoň 8 rôznych prvočíselných faktorov, a prvočíselného deliteľa $>10^6$. Jeho druhý najväčší prvočíselný deliteľ musí byť aspoň 10^4 a tretí najväčší aspoň 100. V r. 1958 Perisastri dokázal, že ak n je nepárne dokonalé číslo, tak $\frac{1}{2} < \sum_{p|n} \frac{1}{p} < 2\log\frac{\pi}{2}$.

V r. 1913 L.E.Dickson dokázal, že existuje len konečne veľa nepárnych dokonalých čísiel n s daným počtom k rôznych prvočíselných deliteľov. V r. 1994 Heath-Brown dokázal, že pre takéto n platí $n < 4^{4^k}$, atď. Čitateľa odkazujeme pre nedostatok miesta na ďalšiu literaúru, napr. [11], [12], [26].

To všetko naznačuje, že nepárne dokonalé číslo asi neexistuje, ale dokázať to stále nevieme.

5 Keď si nevieš niečo dokázať, zovšeobecňuj

V súčasnosti existuje mnoho variant zovšeobecnenia dokonalých čísiel. Uvedieme len tri z nich:

1. Obmedzíme množinu deliteľov. Napr. vezmeme len tzv. unitárne delitele. Deliteľ d čísla n sa nazýva *unitárny*, ak čísla d a n/d sú nesúdeliteľné. Číslo n sa nazýva *unitárne dokonalé*, ak sa rovná súčtu vlastných unitárnych deliteľov. Zatiaľ poznáme

[34] Do svojho exemplára Diofanta napísal Fermat známu poznámku o nedostaku miesta na okrajoch k tomu, aby tam napísal dôkaz tzv. veľkej Fermatovej vety, že rovnica $x^n + y^n = z^n$ nie je rešiteľná v prirodzených číslach x, y, z pre $n > 2$.

len 5 takýchto čísiel: 6, 60, 90, 87360, 146361946186458562560000. Vieme, ale že neexistuje nepárne unitárne dokonalé číslo.
2. Rozšírime pojem prirodzeného čísla na iné štruktúry. Napr. analóg dokonalého čísla v okruhu Gaußových celých čísiel je vyšetrovaný v [16]. Vyžaduje však väčšiu technickú prípravu, a preto nebudeme zachádzať do podrobností.
3. Upravíme definíciu súčtu. Namiesto súčtu uvažujme ich harmonický stred, napr. číslo 6 má 4 delitele 1, 2, 3 a 6. Ich harmonický stred je $\frac{4}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2$. Označme harmonický stred deliteľov čísla n symbolom $H(n)=\frac{\sum_{d|n}1}{\sum_{d|n}1/d}$. Ak harmonický stred je celé číslo, tak číslo sa nazýva *harmonické číslo* alebo *Oreho číslo.*[35] Ore dokázal, že každé dokonalé číslo je Oreho číslom. V r. 1955 dokázal Laborde, že n je párne dokonalé číslo vtedy a len vtedy, keď $n=2^{H(n)-1}(2^{H(n)}-1)$. V dôsledku toho, ak n je párne dokonalé číslo, tak $H(n)$ je dokonca prvočíslo.

   Ore vyslovil hypotézu, že $H(n)$ nie je celé, ak $n>1$ je nepárne číslo. To by znamenalo, že neexistuje nepárne Oreho číslo >1. Ak je to pravda, je problém nepárnych dokonalých čísiel vyriešený.

Týmto nie sú možnosti zovšeobecnenia pojmu dokonalého čísla zďaleka vyčerpané. Označme $s(n)=\sum_{d|n,\, d<n} d$ súčet alikvótnych častí čísla n. Číslo n sa nazýva *násobne dokonalé*, ak $n\,|\,s(n)$, špeciálne ak $s(n)=(k-1)n$ číslo sa nazýva *k-násobne dokonalé*. Napr. $s(120)=240$, t.j. 120 je 3-násobne dokonalé číslo. Existuje hypotéza, že pre každé $k>2$ existuje len konečne veľa *k*-násobne dokonalých čísiel.

Ak n je dokonalé, tak $s(n)=n$. Vzniká otázka, ako sa chová postupnosť iterácii funkcie $s(n)$, t.j. postupnosť n, $s(n)$, $s(s(n))$, ..., $s^k(n)=s(s^{k-1}(n))$, ... Catalan a Dickson sa domnievali, že každá takáto postupnosť je ohraničená. Napr. $s^{117}(138)=179931895322$, ale $s^{177}(138)=1$. Číslo $s^{469}(276)$ má 45 dekadických cifier, atď. Dnes prevláda názor, že táto hypotéza neplatí.

Literatura

[1] Acerbi F.: *A reference to perfect numbers in Plato's Theaetetus*. Archive for History of Exact Sciences 59(2005), 319–348.

[2] Bezdíček J.: *O číslech spřízněných a dokonalých*. Příloha k Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky 25(1896), 129–142, 209–224.

[3] *Dodatek redakce k článku předchozímu*, ibid. 25(1986), 225–229.

[4] Bezdíček J.: *Recenze výročných správ*. ibid. 33(1904), 156; 34(1905), 248.

[35] Ore dokázal, že súčin aritmetického stredu všetkých deliteľov čísla *n* s ich harmonickým stredom sa rovná samotnému číslu *n*.

[5] Bezdíček J.: *Eukleidovy základy* (recense knihy). ibid. 37(1908), 286.

[6] Borho W., Zagier D., Rohlfs J., Kraft H., Jantzen J. C.: *Lebendige Zahlen. Fünf Exkursionen.* Mathematische Miniaturen 1. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1981; existuje ruský preklad Moskva, 1985.

[7] Le Besgue V. A.: *Exercices d'Analyse Numérique*, Liber et Faraguet, Paris, 1859.

[8] Brentjes S.: *Die ersten sieben vollkommenen Zahlen und drei Arten befreundeter Zahlen in einem Werk zur elementaren Zahlentheorie von Ismail b. Ibrahim ibn Fallus*. NTM, International Zeitschrift für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften und Technik 24(1987), 21–30.

[9] Brentjes S.: *Eine Tabelle mit vollkommenen Zahlen in einer arabischen Handschrift aus dem 13. Jahrhundert*. Nieuw Arch. Wisk. (4) 8 (2) (1990), 239–241.

[10] Crubellier M., Sip J.: *Looking for perfect numbers*. History of Mathematics: History of Problems, Paris, 1997, str. 389–410.

[11] Dickson L. E.: *History of the Theory of Numbers*. Zv. 1, Carnegie Institute of Washington, 1919.

[12] Guy R. K.: *Unsolved Problems in Number Theory*. 3. vyd., Problem Books in Mathematics. Springer – Verlag, New York, 2004.

[13] Heath T.: *A history of Greek mathematics*. Zv. 1, Clarendon Press, Oxford, 1921.

[14] Lightfoot J. L.: *An Early Reference to Perfect Numbers? Some Notes on Euphorion, SH 417.* The Classical Quarterly, New Series 48(1998), No. 1, 187–194.

[15] Manteuffel H. G.-K.: *Na počiatku bol abakus*. Smena, Bratislava, 1981.

[16] McDaniel W.: *Perfect Gaussian integers*. Acta Arithemetica 25(1974), 137–144.

[17] Melfi G.: *On two conjectures about practical numbers*. J. Number Theory 56(1996), 205–210.

[18] Menninger K.: *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*. 3. vyd., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1958.

[19] Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetics*. (translated into English by M.L.D'Oooge) University of Michigan Studies, Humanistic Series XVI, The Macmillan Company, New York, 1926.

[20] Ore Ø.: *On the averages of the divisors of a number*. American Mathematical Monthly 55(1948), 615–619.

[21] Picutti E.: *Pour l'histoire des sept premiers nombres parfaits*. Historia Mathematica 16(1989), 123–136.

[22] Porubský Š.: *Fermat a teorie čísel*. In: Matematik Pierre de Fermat, Cahiers du CEFRES no. 28, CEFRES (Francouzský ústav pro výzkum ve spoločenských vědách) Praha, 2002, str. 49–86.

[23] Rashed R.: *Ibn al-Haytham et les nombres parfaits*, Historia Mathematica 16(1989), 343–352.

[24] Rashed R.: *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. London, 1994.

[25] Reich U.: *Hudalrichus Regius (Ulrich Rieger) und die perfekten Zahlen*. In: Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit, Rainer Gebhardt (editor): Band 19 der Schriften des Adam-Ries-Bundes e. V. Annaberg-Buchholz Beiträge des wissenschaftlichen Kolloquiums vom 18. 4. – 20. 4. 2008 in der Berg- und Adam-Ries-Stadt Annaberg-Buchholz, 2008, str. 75–84.

[26] Ribenboim P.: *The Little Book of Digger Primes*. 2. vyd., Springer, New York, 2004.

[27] Richardson L. J.: *Digital reckoning among the ancients*. American Mathematical Monthly 23(1916), 7–13.

[28] Saias E.: *Entiers à diviseurs denses 1*, J. Number Theory 62(1997), 163–191.

[29] Sieprinski W.: *Teoria liczb* (wydanie trecie, powiekszone), Monografie matematyczne zv. XIX, Warszawa – Wroclaw, 1950.

[30] Srinivasan A. K.: *Practical numbers*. Current Science 17(1948), 179–180.

[31] Stewart B. M.: *Sums of distinct divisors*. American Journal of Mathematics 76(1954), 779–785.

[32] Taisbak C. M.: *Perfect numbers a mathematical pun?* Centaurus 20(1976), 269–275 (1977).

[33] Wikipedia (The free encyclopedia): *Chinese number gestures* [online]. Posledná revízia 3. júna 2008 [cit. 7. 6. 2008]. http://en.wikipedia.org/wiki/Chinese_number_gestures.

[34] Wikipedia (The free encyclopedia): *Babylonian astrology* [online]. Posledná revízia 5. júna 2008 [cit. 10. 6. 2008]. http://en.wikipedia.org/wiki/Babylonian_astrology

[35] Williams B. P., Williams R. S.: *Finger Numbers in the Greco-Roman World and the Early Middle Ages*. Isis 86 (1995), 587–608.

Adresa

Prof. RNDr. Štefan Porubský, DrSc.
Ústav informatiky AV ČR, v.v.i.
Pod Vodárenskou věží 2
182 07 Praha 8 – Libeň
e-mail: *porubsky@cs.cas.cz*