

Ab igne ignem

László Béla 75. születésnapjára
K 75. narodeninám Bélu Lászlóa

Attila Komzsík - Tibor Szabó (ed.)

Nitra 2015

© Közép-európai Tanulmányok Kara, Nyitrai Konstantin Filozófus Egyetem, 2015
Fakulta stredoeurópskych štúdií UKF v Nitre 2015

Lektorálta/Recenzenti:
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
doc. PaedDr. Ján Gunčaga, PhD.

Ab igne ignem

László Béla 75. születésnapjára
K 75. narodeninám Bélu Lászlóa

© A szerzők/Autori, 2015

ISBN 978-80-558-0792-8
EAN 9788055807928

Quasimodo v ríši grúp

Štefan Porubský

Práca je venovaná dlhoročnému priateľovi Prof. RNDr. Bélovi Lászlóvi, CSc., pri príležitosti jeho 75. narodenín.

Abstract: In the first part we shortly summarize the history of change ringing which started to spread after the English Reformation. In the second part we show that the background of the change ringing is closely related to the group theory and that the tools of group theory played implicitly a decisive role – long before the emergence of the abstract group theory – in designing of extents, compositions of changes.

Keywords: *change ringing, dihedral group, coset, permutation*

Umění melodického zvonění je zvláštnost Anglie a jako většina jejich zvláštností ani tuto svět nechápe. Hudební Belgičan si myslí, že hlavní věc je tu zahrát s těmi přesně laděnými zvony melodií. Anglický kampanolog však považuje hraní melodií za dětskou hru, která je jen pro cizince; vlastní zvonické umění spočívá v matematickém vypočítávání kombinací a permutací. Když mluví o hudbě svých zvonů nemá na mysli hudbu hudebníků – a to ještě míň to, co za hudbu považuje obyčejný člověk. Pro toho je zvonění monotonním břinkáním a hlukem, který je snesitelný jen na větší vzdálenost, nebo když je člověk sentimentálně naladěný. Pravý zvoník však rozlišuje hudební rozdíly mezi jedním prováděním permutací a druhým; tvrdí např., že kde zvoní zadní zvony 7, 6, 5 nebo 5, 6, 7, nebo 5, 7, 6 je to hudebně vždycky hezcí; dovede zjistit a rozeznat kvintu Tittusovu a kaskádovou tercií Královninu. Při anglické metodě zvonění provazem a kolem vydá každý zvon svůj nejplnější a nejlahodnější tón, o tom je přesvědčen. Jeho vášeň – a to je vášeň – je upokojena matematickou přesností a mechanickou dokonalostí a když jeho zvon se dostane z prvního místa na poslední a zpátky, je slavnostně opojen bezvadným provedením tohoto složitého obřadu. Neinformovanému divákovi, který by viděl zkoušku jen zběžně, by těch osm soustředěných tváří, těch osm napjatých postav balanujících v začarovaném kruhu na okrajích osmi židlí, těch osm zvednutých rukou nepochopitelně natřásajících zvonky nahorů a dolů, mohlo snad připadat poněkud absurdní, ale pro aktivní účastníky to všechno bylo vážné a důležité jako odpoledne ve sněmovně lordů, když jsou na pořadu australské záležitosti.

D.L.Sayers, *Devět hran* [4, str. 16-17].

1 HRÁTKY ANGLICKÝCH ZVONÁROV

Náš úvodný citát z detektivky, naznačuje známou skutočnosť, že v Anglicku je mnoho vecí ináč, než v kontinentálnej Európe. Pre nezainteresovaného čitateľa sa môže zdať to, o čom autorka hovorí, nezrozumiteľné. Snáď sa situácia dodatočne zmení po prečítaní nasledujúcich riadkov. Ako všetko i naša téma má svoju históriu.

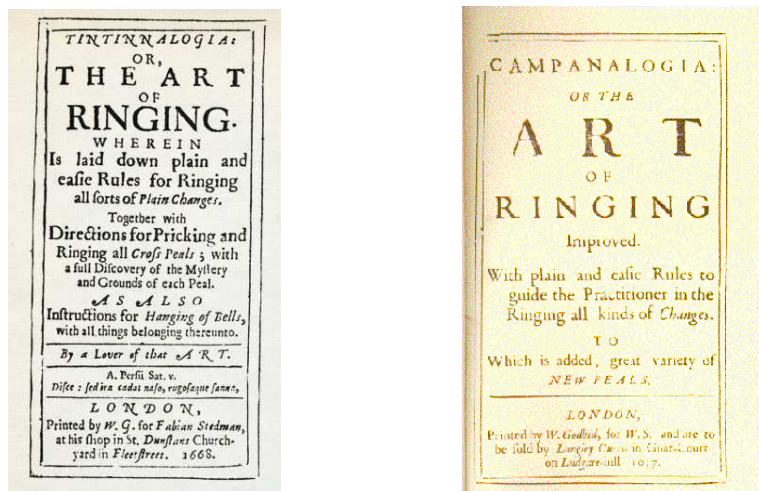
Pre naše ciele bolo rozhodujúcim momentom odtrhnutie anglikánskej cirkvi v Anglicku od Svätej stolice tzv. Supremačným aktom Henrichom VIII. v r. 1534. Osamostatnenie cirkvi malo samozrejme aj mnoho vedľajších prejavov. Jedným z nich bolo i zvonenie v kostoloch. Znesväcovanie kláštorov a budov po odtrhnutí anglikánskej cirkvi bolo často spojené s odstraňovaním kostolných zvonov a zmenou zvyklostí spojených so zvonením, často chápaných ako prejav katolicizmu. Tzv. variantné zvonenie (v hore uvedenom citáte nazvané ako melodické), o ktorom bude reč, sa etablovalo v Anglicku už pred 17. storočím. V tej dobe sa objavujú aj prvé spolky² (ďalší typicky britský prvok, zlučovať sa do spolkov), ktoré sústreďovali

¹Táto práca bola napísaná s podporou na dlhodobý koncepčný rozvoj výzkumnej organizácie RVO: 67985807.

²Prvý dokázateľný spolok (cech) bol *Company exercising the Arte of Ringing knowne and called by the name of the Schollers of Cheapeside in London* z roku 1603; ďalší bol *Society of Ringers of St Hugh* pri Lincolnskej katedrále (1612) alebo *Society of St Stephen's Ringers* v Bristole (1620).

Ľudí zaujímajúcich sa o tento typ zvonenia. Sústreďovanie sa do spolkov znamená už dlhšiu tradíciu. Prvé písomné zmienky o zvonení na zvony zo sekulárnych dôvodov existujú už z 15. storočia. Dôvodom bolo zlepšené technické zavesenie zvonov a ich lepšia ovládateľnosť vďaka technickému vylepšeniu, v ktorom sa koleso použilo na vedenia lana (viď nižšie), ktorým sa rozhupuje zvon.

Centrom zvonárskych aktivít boli väčšie mestá. Nemecký Paul Hentzner popisuje návštevu Londýna³ z r. 1598 nasledovne [3, výňatok z §61]:



Obr. 1: Prvé knihy o variantnom zvonení

... silné zvuky ako rámus diel alebo zvuk bubnov a zvonov sa im veľmi páči. Hodne Londýňanov vylieza – potom, čo si snáď niečo vypili – na tú alebo onú vežu kostola a tam za účelom nacvičovania zvonenia strávia niekoľko hodín.

Na prelome 16. a 17. storočia ako naznačuje predchádzajúci citát sa zaznamenáva silný záujem ľudí o nový spôsob zvonenia, ktorý by sa dal charakterizovať slovami, že ľud prevzal zvonice od duchovných. Za panovania Jakuba II. (1633-1688) sa variantné zvonenie rýchlo rozšírilo medzi aristokraciu vďaka fyzickej náročnosti a ako intelektuálna výzva. Dôležitým medzníkom bol r. 1668, keď vyšla prvá kniha pod názvom *Tintinnologia, alebo umenie zvonenia* od Richarda Duckwortha a Fabiana Stedmana [2] obsahujúca pravidlá a popis tejto techniky zvonenia. V r. 1677 Stedman vydáva ďalšiu knihu *Campanologia* [5].

Zvonenie, o ktorom budeme hovoriť takto prestalo byť cirkevnou záležitosťou, ale postupne sa z neho vyvinula istá voľnočasová aktivita spojená s intelektuálnym nábojom, ktorý má hlboké matematické pozadie a navyše je spojená s istým športovým výkonom.

V anglickej zvonici visí niekoľko zvonov. Pred rokom 1700 anglické zvonice mali 3-4 zvony. Len výnimočne mali 6, napr. Cathedral and St. Swithun's Church vo Worcesteri. Najstaršia zachovalá zvonica so 6 zvonmi z r. 1673 je v St. Peter's Church at Martley, Worcestershire. Počet zvoníc sa postupom času rozrastal, dnes ich je v Anglicku okolo 6100.⁴ Najčastejší

³Londýn mal v r. 1552 cez 80 kostolov so zvonnicou, v ktorých bolo od troch do šiestich zvonov.

⁴Odhaduje sa, že vo Veľkej Británii existuje okolo 60 zvonov z obdobia pred rokom 1300. Najstarší známy zvon je v Lissett, East Yorkshire, datovaný do r. 1254. Jeden zvon v Caversfield, Oxfordshire, keď je datovaný podľa darcu môže byť z obdobia 1207-1291.



Obr. 2: Pohľad na zvony zhora a na zvoniacich zvonárov

počet zvonov dnes je 6, inak ich počet môže byť aj 12. Napríklad Katedrála Sv. Pavla v Londýne, sídlo londýnskeho arcibiskupa, má 12 zvonov.

Každý zvonár zvoní na jednom zvone a celé zvonenie obyčajne riadi jeden vedúci zvonár ako dirigent. Upevnenie zvonov umožňuje realizovať len jeden jediný úder zvona. Zvonári postupne zvoní jeden úder za druhým, každý na svojom zvone. Nikdy nezaznejú dva zvony súčasne a cieľom je prezvoniť vybrané „postupky“ všetkých zvonov postupne jednu za druhou. Na počiatku sa zvonili len niektoré postupky zvonov. Ak zvoníme na šiestich zvonoch, očíslovaných 1, ..., 6, tak niektoré postupky majú svoje mená. Napr. **séria** (angl. rounds) je označenie pre postupku (123456), **kráľovna** (queen) pre (135246), **títam tittums** pre (142536) alebo **spiatočka** (backs) pre (654321)⁵. Tieto a ďalšie sa striedali podľa pokynov ‚dirigenta‘ podľa jeho uváženia.

Vybrané postupky sa skladajú dohromady do jedného celku – hry, ktorý budeme volať **kompozícia** (angl. extent). Samotná jedna postupka sa v anglickej terminológii nazýva *change* – zmena. Odtiaľ je anglický názov pre celé zvonenie *change ringing*, čo budeme prekladať ako **variantné zvonenie**. Krátka kompozícia zložená z niekoľkých stovák postupiek sa volá **tuš**, **veta** (touch), väčšia sada s okolo 1250 postupkami sa nazýva **štvrtcyklus** a s okolo 5000 postupkami **cyklus**, **salva** (peal). Pretože autorovi nie je známy žiadny preklad anglickej terminológie do slovenčiny, sú predložené preklady pokusom na ich zavedenie.

Prvý plný cyklus s viac ako 5000 rôznymi postupkami na 6 zvonoch zaznel 2.5.1715 vo farnosti St. Peter Mancroft v Norvich.⁶ V prvej polovici 18 stor. už máme z novinových správ, že zvonári stáli pod zvonmi viac ako tri hodiny a súvisle zvonili celý cyklus $5040 = 7!$ postupiek, t.j. permutácií na siedmich zvonoch, zvanú *Grandsire Triples*, za všeobecného zájmu poslucháčov. Prvý taký záznam pochádza z Leicesteru z marca 1731. Zvonenie trvalo 3 hodiny a dve minúty a sledovali ho údajne tisíce ľudí. Dňa 17.3.1767 v Debenham v Suffolku skupina

⁵Názov *tittums* vznikol z príznačného zvuku v tejto postupke, ktorá sa v angličtine symbolicky zapisuje ti-TUM a pripomína dvojslabičnú zostupnú stopu jambického verša krátka - dlhá slabika. V citáte uvedenom na začiatku je použitý preklad *Tittusova*, ale tu nejde o žiadne meno. Použitie slova *Tittusova* vzniklo asi nedorozumením. Meno kráľovna má údajne pôvod v tom, že sa táto postupka páčila Alžbete I. Postupka (14235) s piatimi zvonmi sa volá *weasels* (lasička), lebo pripomína refrén detskej pesničky *Pop Goes the Weasel*.

⁶Ako o väčšine historických údajov, kde sa jedná o prvenstvo, aj o tomto sa tvrdí v jednom rukopise, ktorý sa nachádza ešte v dnes existujúcej londýnskej spoločnosti *Ancient Society of College Youths* založenej v r. 1637, že prvý úplný cyklus na siedmich zvonoch a to metódou *Plain Bob Triples* bol zahraničný už 7.1.1690 v kostole St. Sepulchre-without-Newgate v Londýne.

ôsmich mladých mužov zahrala cyklus zvaný *Bob Major*, ktorý sa skladal z 10 080 ($8! = 40\,320$) postupiek na ôsmich zvonoch a trvalo im to viac ako 6 hodín. V r. 1963 tým zvonárov v Loughborough zahral kompletnú sériu 40 320 postupiek na ôsmich zvonoch za niečo menej než 18 hodín. Najdlhšia séria 72 000 postupiek na šiestich zvonoch, ktorú zahrali traja zvonári (každý zvonil na dvoch ručných zvonoch)⁷ sa uskutočnila v r. 2007. Nebola to hra podľa pravidiel, lebo postupky sa v nej opakovali. Presnejšie zahrali celé cykly 720 postupiek na šiestich zvonoch podľa stovky rôznych metód *Treble Dodging Minor*. Zvonenie trvalo viac ako 24 hodín. Časopis *The Ringing World*, ktorý je venovaný variantnému zvoneniu a vychádza týždenne od roku 1911, oznámil, že na jeho sté výročie 26.3.2010 zaznie tuš na 24 ručných zvonoch. Samozrejme, nielen prvenstvá v rekordoch sa registrujú. Zvonári majú aj celý rad prestížnych súťaží, po celom anglosaskom svete.

Na živnej pôde týchto aktivít vznikli myšlienky, ktoré predstihli dobu v tom smere, že neskoršie, keď matematici rozvinuli teóriu grúp si všimli, že mnoho z počiatočných výsledkov ohľadne permutácií odhalili zvonári zaoberajúci sa teoretickými podkladmi variantného zvonenia už v 17. storočí, a teda dávno pred vznikom teórie grúp. Zvony sú v Anglicku často na mladomanželských oznámeniach, lebo manželia opúšťajú kostol za zvukov zvonov, ktoré zvoní variantne.

2 NIE JE ZVONENIE AKO ZVONENIE

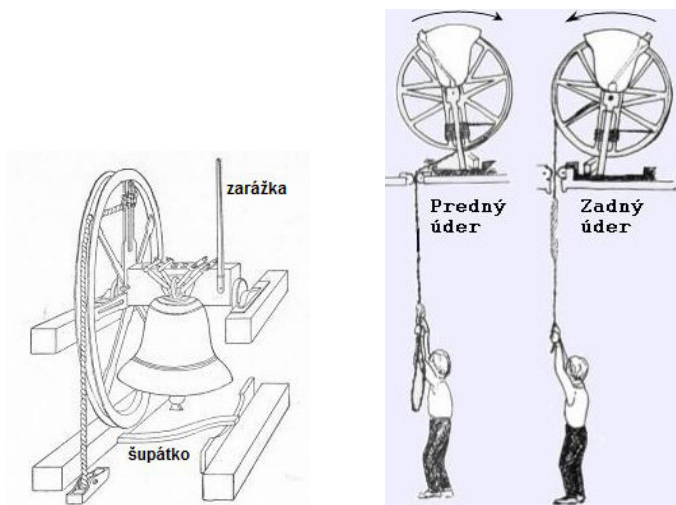
Asi do 14. stor. bolo zvonenie v kostoloch a kláštoroch založené na technike, kde zvonová hlava sa točila v jednoduchom „čape“ a duchovní zvon rozhúpali pomocou lana. Zvonári začali postupne experimentovať s inými spôsobmi upevnenia zvonov, ktorý by umožňoval lepšiu kontrolu nad zvonmi počas zvonenia. Prvé významnejšie vylepšenie prišlo s umiestnením štvrtkruhového kolesa na zvonovej hlave, na obvodě ktorého bolo upevnené lano, za ktoré sa ťahalo. V 15. stor. to už bol polkruh, a v 16. stor. trištvrtkruh už umožňoval kontrolované ovládanie zvona o 180 stupňov. Koncom 16. stor. sa už lano navíjalo na celé koleso. Záverečné zdokonalenie priniesla zarážka a šupátko umožňujúce „nastaviť a zastaviť“ zvon. Zvonárovi to umožnilo otáčať zvonmi o 360 stupňov, zastaviť ho a začať znovu zvoniť podľa prania. Zvon sa mohol otáčať viac než o 360 stupňov. V kľudovej polohe visel ústami dole a srdce viselo voľne.

Techniky zavesenia zvonov a s možnosťou otáčania zvona o 360 stupňov vznikali súčasne na viacerých miestach. Pripomeňme tzv. boloňské zvonenie, ktoré vzniklo v 16. stor. v čase kompetenčnej vevy medzi Rímom a Boloňou. Iné bolo veronské zvonenie (zvony mali protiváhu), v oboch prípadoch sa zvony otáčajú o 360 stupňov. Ďalšie varianty zvonárskych techník sú zvonkohry, alebo zvonenie v pravoslávnych kostoloch.

V anglickej zvonicí stoja zvonári v kruhu vo zvonárskej miestnosti, ktorá sa nachádza vo zvonicí pod priestorom, v ktorom sú zavesené zvony. Obidve miestnosti sú oddelené podlahou (obr. 2). Zvony a ich laná sú namontované tak, že za laná sa poťahuje v kruhovom poradí, obyčajne v smere hodinových ručičiek.

Ťažné lano má na sebe plyšovú časť (sally), dlhú asi 1,2 m, ktorá keď je pred zvonárovými očami je zvon otočený srdcom hore. Potiahnutím lana srdce udrie na zvon na jednej strane a zvonár musí lano pustiť, ktoré vyletí prudko hore smerom ku stropu. Na konci musí potom lano zachytiť. Takto môžu zvonári veľmi presne kontrolovať otáčanie zvona a jeho zvonenie.

⁷Zvonenie na ručných zvonoch bolo populárne za druhej svetovej vojny, keď sa zvony na zvoniciach používali len na ohlasovanie nepriateľských leteckých útokov. Zvonenie na ručných zvonoch má takmer tie iste pravidlá, ale nimi sa nebudeme zaoberať.



Obr. 3: Konštrukcia mechanizmu zvonu a priebeh zvonenia

Na začiatku zvonenia sa zvon otočí o 180 stupňov srdcom hore. V tejto nestabilnej polohe ho drží zarážka. Po zatiahnutí za lano sa zvon otočí o plný uhol, dostane sa do polohy ústami hore a zastaví sa. Pritom srdce jedenkrát udrie. Táto akcia sa volá **predný úder**. Lano sa natočilo na koleso a ruky držiace lano sa dostanú do polohy nad hlavu. Keď zvonár potiahne za lano, zvon sa prehupne v opačnom smere do počiatocnej polohy ústami hore, kde zaznie ďalší úder. Teraz hovoríme o **zadnom údere**. Medzi posledným zadným úderom a prvým predným úderom sa vkladá medzera dvojnásobnej dĺžky. Inak údery nasledujú hneď jeden za druhým. Tak napríklad, zahratie jednej postupky šiestich zvonov prebehne asi za dve sekundy.

Ako sme spomenuli, existuje aj varianta variantného zvonenia na ručných zvonoch. Pritom jeden hráč drží dva zvony, každý v jednej ruke. Pohyb zvonu hore odpovedá prednému úderu a pohyb dole zadnému úderu.

3 PERMUTÁCIE MEDZI ZVONMI

Väčšina zvonárov v Anglicku zvoní dlhé roky. Dvadsať rokov nie je výnimka. Hovoria, že na naučenie sa variantného zvonenia je potrebných desať rokov.

Zvony budeme číslavať postupne číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6, atď. V skutočnosti sú usporiadané podľa rastúcej hmotnosti. Najľahší zvon 1 sa volá *soprán* (treble). Zvon s najhlbším basovým tónom sa volá *tenor*. Zvony sú ladené v diatonickej durovej stupnici odvodennej od tenoru.

Vo variantnom zvonení je možné zahráť rôzne „melódie“. Pritom nikdy nezaznejú dva zvony súčasne a poradie úderov zvonov sa navzájom premiešava podľa presne daných pravidiel. Preto je celé zvonenie rozdelené na prehrávanie postupiek, z ktorých každá je matematicky povedané permutácia zvonov zúčastňujúcich sa na hre. Každá permutácia sa môže za celú hru zahráť len jedenkrát. To však nie sú všetky pravidlá. Súhrnne platia tieto pravidlá:

- (1) Prvá a posledná postupka je vždy séria (t.j. postupka zvonov zahráných v zostupnom tónovom usporiadaní),
- (2) každá permutácia z celkového počtu $n!$ sa v hre opakuje práve raz ako postupka,
- (3) medzi dvomi nasledujúcimi postupkami zmení zvon pozíciu pri zvonení maximálne o jedno miesto (dopredu alebo dozadu),

spôsob	n	$n!$	dĺžka hrania
Singles	3	6	15 sek.
Minimus	4	24	1 min.
Doubles	5	120	5 min.
Minor	6	720	30 min.
Triples	7	5 040	3 hod.
Major	8	40 320	24 hod.
Caters	9	362 880	9 dní
Royal	10	3 628 800	3 mes.
Cinques	11	39 916 800	3 roky
Maximus	12	479 001 600	36 rokov

Tabuľka 1: Mená kompozícií podľa počtu zvonov a odhad dĺžky ich hrania

- (4) žiadny zvon nezostane na tom istom mieste v postupke vo viac ako vo dvoch za sebou idúcich postupkách (niekedy sa pripúšťa tento počet kôl až 4).

Ako príklad si uveďme dve možné kompozície s tromi zvonmi:

1 2 3	1 2 3
2 1 3	1 3 2
2 3 1	3 1 2
3 2 1	3 2 1
3 1 2	2 3 1
1 3 2	2 1 3
<u>1 2 3</u>	<u>1 2 3</u>

Existujú dva spôsoby hrania. Pri tzv. **vyvolávanom variantnom zvonení** (call change ringing) vedúci zvonár vždy zvolaním oznámi, ktoré zvony si vymenia miesto v nasledujúcej postupke. Pri tzv. **metódovom zvonení** (method ringing) sa postupky menia podľa dopredu danej schémy (metódy).

Kompozície hrané pomocou metódového zvonenia majú svoje mená. Tak napríklad, ľavá hra na troch zvonoch sa volá **rýchla šestka** (quick six), a pravá **pomalá šestka** (slow six). Pomenovanie má tri zložky [Meno] [Trieda] [Spôsob]. Tu spôsob určuje počet zvonov, ktoré sa na hre zúčastňujú (viď Tab. 1)⁸. Tento počet nehovorí nič o počte zvonov na zvonici (ktorý je samozrejme minimálne tak veľký ako uvedený v metóde). Pri väčšom počte zvonov na zvonici sa používajú zvony s vyššími tónmi. Pomocou triedy sa zachycujú „zvláštnosti“ metódy akou sa dosahuje splnenie hore uvedených podmienok (1) – (4). Zvonári si pamätajú svoje „noty“ nie tak, že si pamätajú jednotlivé postupky, ale pamätajú si „cestu“ svojho zvonu. Spôsoby ako sa cesty navzájom križujú sa dajú vyčítať z triedy v názve. A pod menom sa objavujú najčastejšie miestne mená, ako Londýn, Kent, alebo meno objaviteľa metódy ako Stedman atď.

Vzniká otázka, ako zostrojiť správnu kompozíciu. Jedna z možností spočíva na nasledujúcej myšlienke. Napr. chceme zostrojiť kompozíciu so štyrmi zvonmi (t.j. nejaký Minimus). Každú

⁸Názov pre 9 a 11 zvonov sú zkomoleniny z francúzskych slov „quatre“ a „Cinque Ports“. Mená poukazujú na počet zvonov, ktoré zmenia svoju pozíciu v každej postupke. Tak napríklad pri troch zvonoch je to samozrejme len jedna trojica, pri siedmich zvonoch je to najviac trojica zvonov a zvyšok zostane na rovnakom mieste v postupke.

Meno Cinque Ports je historické označenie konfederácia piatich prístavov (Hastings, New Romney, Hythe, Dover, Sandwich) na pobreží Lamanšského kanálu v Kentu a Sussexu v mieste, kde je najužší.

1 2 3	2 3 1	3 1 2	1 2 3 4	2 3 1 4	3 1 2 4
1 2 3	2 3 1	3 1 2	1 2 4 3	2 3 4 1	3 1 4 2
1 2 3	2 3 1	3 1 2	1 4 2 3	2 4 3 1	3 4 1 2
1 2 3	2 3 1	3 1 2	4 1 2 3	4 2 3 1	4 3 1 2
<u>2 1 3</u>	<u>3 2 1</u>	<u>1 3 2</u>	4 2 1 3	4 3 2 1	4 1 3 2
2 1 3	3 2 1	1 3 2	2 4 1 3	3 4 2 1	1 4 3 2
2 1 3	3 2 1	1 3 2	2 1 4 3	3 2 4 1	1 3 4 2
2 1 3	3 2 1	1 3 2	2 1 3 4	3 2 1 4	<u>1 3 2 4</u>
					1 2 3 4

Obr. 4: Možná konštrukcia jedného Minimus-u zo Singles

postupku z kompozície na troch zvonoch napíšeme štyrikrát za sebou a potom vsunieme do každej postupky štvorku (obr. 4). Takto môžeme pokračovať ďalej a postupne zostrojíte jednu možnú kompozíciu pre päť zvonov, potom pre šesť zvonov, atď.

Jedna z najznámejších kompozícií pre 4 zvony je kompozícia v angličtine nazývaná *Plain Bob Minimus* (čítajte po stĺpcoch)

1 2 3 4	1 3 4 2	1 4 2 3
2 1 4 3	3 1 2 4	4 1 3 2
2 4 1 3	3 2 1 4	4 3 1 2
4 2 3 1	2 3 4 1	3 4 2 1
4 3 2 1	2 4 3 1	3 2 4 1
3 4 1 2	4 2 1 3	2 3 1 4
3 1 4 2	4 1 2 3	2 1 3 4
1 3 2 4	1 4 3 2	<u>1 2 4 3</u>
		1 2 3 4

4 KEĎ NA ZVONICI KOMPONUJÚ GRUPY

Samozrejme medzi matematikou a znejúcim hudobným produktom nie je žiadny vzťah. Harmonická hudba má však svoju štrukturálnu podstatu a na jej popis dáva matematika primerané nástroje, a to často i vtedy, keď si to samotní hudobníci ani neuvedomujú. Tak napr. temperované ladenie vzniklo v hlavách hudobníkov okolo roku 1700, ale títo takmer s určitostou nemali žiadnu predstavu o iracionálnom čísle $\sqrt[12]{2}$. Samozrejme existujú aj opačné príklady. Niektorí skladatelia zámerne používali matematický prístup pri komponovaní svojich skladieb. Takým bol napríklad Claude Debussy, ktorý vychádzal z Fibonacciho postupnosti. Zlatý rez súvisiaci s Fibonacciho číslami sa objaví pri analýze diela Bélu Bartóka, atď.

Iný príklad dostaneme, keď temperovanú stupnicu chápeme ako aditívnu grupu zvyškových tried modulo 12. Ale nám nejde o tento typ grupovej reprezentácie v hudbe. Teória grúp nám pomôže analyzovať kompozície hrané vo variantnom zvonení. Teóriu grúp však vyvinuli matematici postupne od 18. stor. Ako táto iste nebola k dispozícii Stedmanovi v r. 1677 a jeho predchodcom (a ani jeho blízkym následovníkom). Môžeme však povedať, že Stedman implicitne využíval tieto prostriedky [6].

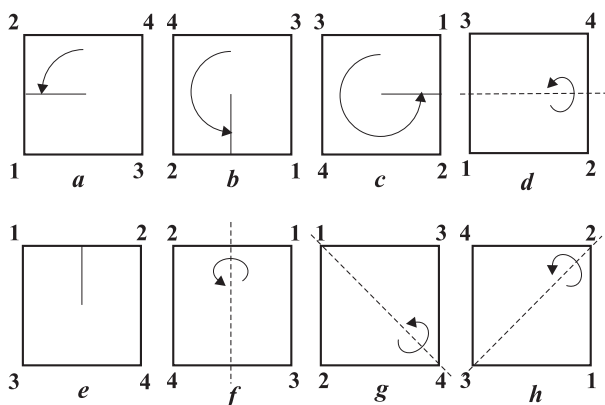
Dnes je každému poslucháčovi matematiky jasné, že jednotlivé postupky vo variantnom zvonení sú permutácie daného počtu zvonov, a prechod medzi riadkami sa dá popísať ako skla-

1 2 3 4 5 6		
2 1 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	
2 1 4 3 5 6	2 1 4 3 6 5	
2 1 4 3 6 5		

Obr. 5: Účinok troch jednoduchých zámien a jednej krížovej

danie permutácií. Ovšem nie ľubovoľných permutácií, len takých ktoré zaručujú splnenie našich podmienok (1)-(4). My si všimneme len podmienku (3). Najjednoduchším spôsobom ako ju zabezpečiť, je použiť tzv. **jednoduchú zámenu** (plain changes), kde dochádza k výmene miesta u *jedinej* dvojici. Iná, rýchlejšia z hľadiska efektu, je tzv. **krížová zámena** (cross changes), v ktorej sa vymení niekoľko susedných dvojíc (viď obr. 5). Tieto dva typy zámien, boli hlavnými „trikmi“ metód pri tvorení kompozícií okolo r. 1621, keď Stedman písal svoje knihy.

Permutácie sú nielen dôležitým matematickým pojmom, ale štúdium ich vlastností sa berie ako jeden zo zdrojov zrodu teórie grúp. Ďalším prvkom pri rozvoji teórie grúp je pojem symetrie. Dnes vieme, že tieto dva pojmy sú v tesnej vzájomnej súvislosti. To preto, lebo pri analýze akéhokoľvek štruktúrovaného „zhluku“ objektov hrá dôležitú úlohu popis jeho symetrií, t.j. znalosť tých transformácií, ktoré zachovávajú príslušnú štruktúru. Tieto transformácie nazývame symetriami, a ich znalosť nám umožňuje sprehľadniť a zjednodušiť popis danej štruktúry. Pritom do popredia sa dostane skutočnosť, že symetrie ako bijektívne transformácie zachovávajúce danú štruktúru tvoria vždy grupu.



Obr. 6: Symetrie štvorca

Uvažujme všetky symetrie štvorca [1, str. 123], ktorého vrcholy sú očíslované podľa obr. 6:

- e – identické zobrazenie vyjadrené pomocou permutácie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ alebo zapísané pomocou cyklov $\{ \}$, t. j. bez cyklu, lebo všetky prvky sú pevné body,
- a – otočenie okolo stredu štvorca o 90° proti smeru hodinových ručičiek vyjadrené pomocou permutácie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ a zapísané pomocou cyklov (1342) ,
- b – otočenie okolo stredu štvorca o 180° proti smeru hodinových ručičiek vyjadrené pomocou permutácie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a zapísané pomocou cyklov $(14)(24)$,

o	e	a	b	c	d	f	g	h
e	e	a	b	c	d	f	g	h
a	a	b	c	e	g	h	f	d
b	b	c	e	a	f	d	h	g
c	c	e	a	b	h	g	d	f
d	d	h	f	g	e	b	c	a
f	f	g	d	h	b	e	a	c
g	g	d	h	f	a	c	e	b
h	h	f	g	d	c	a	b	e

Obr. 7: Cayleyho tabuľka symetrií štvorca

c – otočenie okolo stredy štvorca o 270° proti smeru hodinových ručičiek vyjadrené pomocou permutácie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a zapísané pomocou cyklov (1243),

d – preklopenie okolo vodorovnej osi prechádzajúcej stredom štvorca vyjadrené pomocou permutácie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a zapísané pomocou cyklov (13)(24),

f – preklopenie okolo zvislej osi prechádzajúcej stredom štvorca vyjadrené pomocou permutácie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ a zapísané pomocou cyklov (12)(34),

g – preklopenie okolo vedľajšej uhlopriečky (preklopenie okolo osi II. a IV. kvadrantu) vyjadrené pomocou permutácie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ a zapísané pomocou cyklov (23),

h – preklopenie okolo hlavnej uhlopriečky (preklopenie okolo osi I. a III. kvadrantu) vyjadrené pomocou permutácie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ a zapísané pomocou cyklov (14).

Cayleyho tabuľka grupy všetkých symetrií štvorca, t.j. tabuľka výsledkov skladania jednotlivých symetrií štvorca, je na obr. 7. Tak napríklad, výsledkom preklopenia štvorca okolo zvislej osi a jeho následným preklopením okolo vedľajšej uhlopriečky je otočenie štvorca o 270° proti smeru hodinových ručičiek, t. j. $fg = c$. Tento výsledok nájdeme na priesečníku stĺpca f s riadkom g .

Symetrie štvorca tvoria tzv. **dihedrálnu grupu** D_4 . Táto grupa je jedna z dvoch nekomutatívnych z celkove piatich grúp rádu 8. Nie je cyklická, ale je generovaná dvomi prvkami a a f , t.j. každý jej prvok sa dá napísať v tvare $f^i a^j$, kde $i, j = 0, 1, 2, 3$. Takto, $f^0 a^0 = e$, $f^0 a^1 = a$, $f^0 a^2 = b$, $f^0 a^3 = c$, $f^1 a^0 = f$, $f^1 a^1 = h$, $f^1 a^2 = d$ a $f^1 a^3 = g$.

Dvojica a, f nie je jediná dvojica generátorov grupy D_4 . Inou je napr. f, g . Tu máme: $f^0 g^0 = e$, $f^0 g = g$, $f g^0 = f$, $f g = c$, $(f g)^2 = b$, $(f g)^3 = a$, $f(f g)^2 = d$, $f(f g)^3 = h$. Vyjadrenie prvkov pomocou generátorov nemusí byť jednoznačné: $e, f, f g = c, f g f = h, (f g)^2 = b, (f g)^2 f = d, (f g)^3 = a, (f g)^3 f = g$ je iná reprezentácia.

Výsledky týchto operácií skladania permutácií, môžeme priamo overiť pomocou tabuľky na obr. 7. Môžeme samozrejme postupovať aj priamym výpočtom. Pri skladaní permutácií v ich „dvojriadkovom zápise“ u nás obyčajne postupujeme zľava doprava. Takto dostaneme

$$fg = (12)(34)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1342) = a.$$

To ale neodpovedá tretiemu riadku v kompozícii *Plain Bob Minimus*. Výsledok by mal byť $c = (1234)$. Problém je v tom, že pri použití spôsobe zápisu skladania zobrazení musíme pri skladaní permutácií ako zobrazení postupovať *sprava doľava*. Napr.

$$(fg)(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} (1) = 2,$$

Podobne

$$(fg)(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} (2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} (3) = 4,$$

atď., t. j. $fg = c$, čo je správny výsledok.⁹

Vráťme sa k variantnému zvoneniu. Všimnime si prvý stĺpec v *Plain Bob Minimus-e*. Krížová zámena na 4 prvkoch je permutácia $f = (12)(34)$ a jednoduchá zámena (stredných prvkov) je $g = (23)$. Prvé dva riadky v *Plain Bobe* dostaneme postupne použitím permutácií f a g . Keď si ten prvý stĺpec všimneme bližšie, zistíme, že ho dostaneme použitím permutácií

$$e, f, fg, fgf, (fg)^2, (fg)^2f, (fg)^3, (fg)^3f. \quad (1)$$

Pokračujme v (grupovej) analýze *Plain Bobu*. Prvý stĺpec sme dostali postupnou aplikáciou permutácií z (1). To ale už vieme, že je to grupa D_4 , lebo tá je generovaná permutáciami f, g . Inými slovami, prvý stĺpec *Plain Bobu* dostaneme postupnou aplikáciou prvkov dihedrálnej grupy D_4 . Grupa D_4 je samozrejme podgrupou grupy všetkých permutácií na štyroch prvkoch, tzv. **symetrickej grupy** S_4 , ktorá má 24 prvkov (samozrejme, práve toľko, koľko je postupiek (riadkov) v kompozícii *Plain Bob Minimus*).

K tomu, aby sme dostali z poslednej postupky (riadku) v prvom stĺpci prvý riadok druhého stĺpca, potrebujeme použiť permutáciu (de facto opäť konvolúciu) $p = (34)$, ktorá ale nepatrí do D_4 . Potom ale druhý stĺpec v *Plain Bobe* má tvar

$$q, qf, qfg, qfgf, q(fg)^2, q(fg)^2f, q(fg)^3, q(fg)^3f,$$

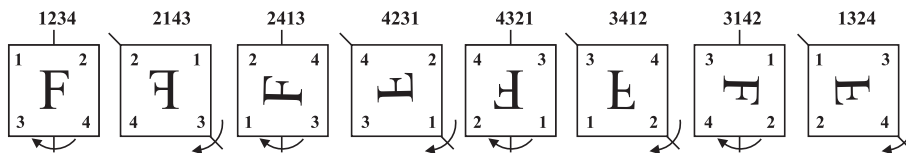
kde $q = ((fg)^3)fp = (234)$. Ale to nie je nič iného, než zvyšková trieda v symetrickej grupe S_4 podľa dihedrálnej grupy D_4 . Pravý stĺpec v *Plain Bobe*, je zvyšková trieda q^2D_4 .

Poznamenajme, že po tejto analýze máme aj matematický dôkaz splnenia podmienok (1)-(4). Tak napríklad, máme

- (1) plynie z toho, že $((fg)^3fg)^3 = e$,
- (2) plynie z rozkladu symetrickej grupy S_4 na zvyškové triedy podľa grupy D_4 ,
- (3) plynie z toho, že na jednotlivé riadky boli aplikované involúcie,
- (4) plynie z toho, že sme v každom druhom kroku použili permutáciu $f = (12)(34)$,

⁹Podľa toho v akom poradí zapisujeme poradie funkcií rozlišujeme postfixový a prefixový zápis skladania. V **prefixovom tvare** zápisu ako prvý zapisujeme symbol funkcie a až potom argument fx alebo $f(x)$. V **postfixovom zápise** najskôr zapíšeme argument a až potom symbol funkcie xf alebo $(x)f$. Typický príklad je faktoriál $n!$. Je zrejme, že prefixový a postfixový zápis sa od seba veľmi nelíšia a jeden možno previesť na druhý jeho úplným obrátením. Je však nutné ošetriť jeden dôležitý detail. Po obrátení postfixového výrazu dostaneme prefixový tvar s obráteným poradím symbolov funkcií.

Prirodzeným pokračovaním postupnosti permutácií v (1) je permutácia $(fg)^4$, čo by bola permutácia po poslednom riadku. Je to identická permutácia, $(fg)^4 = e$. To ale dá pôvodnú sériu z prvého riadku. Keď sa nad tým hlbšie zamyslíme, a uvedomíme si, že do konca *Plain Bobu* aplikujeme len tzv. **susedné transpozície**, ktoré vymenia len dva susedné prvky, a vezmeme do úvahy, že každá kompozícia sa začína identickou permutáciou, a ňou aj končí, sme týmto nepriamo dokázali známu vetu, že každá permutácia na štyroch prvkoch sa dá napísať ako zloženie susedných transpozícií, t.j. že D_4 a S_4 sú generované susednými transpozíciami.¹⁰



Obr. 8: Plain Bob Minimus a symetrie štvorca

Jednoduchšiu grupovú analýzu variantného zvonenia na troch zvonoch (t.j prípad singles) prenechávame čitateľovi.

5 ZDROJE POUŽITÝCH OBRÁZKOV

obr. 1: <http://www.chantler.plus.com/ring.htm> & <http://www.bellringing.org/history/>

obr. 2: <http://naturenet.net/blogs/wp-content/uploads/bells1.jpg> & <http://media-1.web.britannica.com/eb-media/84/43584-004-DE89373A.jpg>

obr. 3: http://bakewellonline.co.uk/documents/bells_and_clock_of_all_saints_bakewell/ & <http://www.notechmagazine.com/wp-content/uploads/2014/10/change-ringing.jpg>

6 POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] Birkhoff, G. – Mac Lane, S. *Prehľad modernej algebry*. Alfa, Bratislava, SNTL, Praha 1979.
- [2] Duckworth, R. – Stedman, F. *Tintinnologia: or, the Art of Ringing*. Tho. Archer, London 1671.
- [3] Hentzner, P. *Itinerarium Germaniae, Galliae, Angliae, Italiae*. Wagenmann, Nürnberg 1612.
- [4] Sayers, D.L. *Devět hran*. Vyšehrad, Praha 1970.
- [5] Stedman, F. *Campanalogia, or, The art of ringing improved with Plain and Easie Rules to Guide the Practitioner in the Ringing All Kinds of Changes. to Which Is Added, Great Variety of New Peals*. Printed by W. Godbid, for W.S. and are to be sold by Langley Curtis ..., London 1677.
- [6] White, A.T. *Fabian Stedman: The first group theorist?* Amer. Math. Monthly **103** (1966), 771–778.

¹⁰Toto tvrdenie platí pre každé S_n , $n > 1$. Naviac každá konečná nekomutatívna grupa, ktorá je generovaná dvomi prvkami druhého rádu, je izomorfná s niektorou dihedrálnou grupou D_n (grupa D_n je grupou symetrií pravidelného n -uholníka).

7 ADRESA

prof. RNDr. Štefan Porubský, DrSc.
Ústav informatiky AVČR, Praha, Česká republika
sporubsky@hotmail.com